## 1. Классическая и геометрическая вероятность.

1.1. Независимо друг от друга 5 человек садятся в поезд, содержащий 13 вагонов. Найти вероятность того, что хотя бы два пассажира поедут в одном вагоне.

1.2. В киоске продаются 9 лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет 3 штуки. Студент купил 4 билета. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше 2, но не больше 3?

1.3. В группе учатся 13 юношей и 9 девушек. Случайным образом выбраны 3 студента. Найти вероятность того, что все выбранные окажутся либо юношами, либо девушками.

1.4. Имеются 25 экзаменационных билетов, каждый из которых содержит условие задачи из одного из двух списков задач. Пятнадцать билетов содержат по одной задаче из первого списка, а в остальных десяти билетах содержится по одной задаче из второго списка. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найти вероятность того, что хотя бы одному из студентов не достанется задача из второго списка.

1.5. В ящике 12 шаров, из них 3 белых, а остальные чёрные. Из ящика наугад вынимают набор из пяти шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных есть хотя бы один белый шар?

1.6. На полке в случайном порядке расставлены 15 книг, среди которых есть трёхтомник Пушкина. Найти вероятность того, что все три тома стоят рядом, причём номера томов расположены в порядке возрастания. Найти вероятность того, что номера томов расположены в порядке возрастания, но тома не обязательно стоят рядом.

1.7. Три человека по очереди бросают правильную монету. Выигрывает тот, у кого раньше всех выпал «орёл». Найти вероятность выигрыша каждого из трёх игроков.

1.8. Четыре различных шара наудачу распределяются по трём разным урнам. Найти вероятность того, что ровно одна урна окажется пустой.

1.9. Из ряда натуральных чисел от 1 до 10 выбирают без возвращения одно за другим два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет больше нуля, но меньше 3?

1.10. На шести карточках написано по одной букве, из которых можно составить слово АНАНАС. Карточки рассыпали и снова выставили в ряд в случайном порядке. Найти вероятность того, что снова получится слово АНАНАС.

1.11. Два человека договорились о встрече между 10 и 11 часами утра, причём условились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

1.12. В круг единичного радиуса наудачу бросаются четыре точки. Найти вероятность того, что:

а) расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не больше 0.75;

б) расстояние от центра круга до самой удаленной точки будет не меньше 0.5.

1.13. Интервалы движения для автобусов первого и второго маршрутов составляют 10 мин. и 15 мин. Время ожидания пассажиром автобуса любого из двух маршрутов можно считать выбранным наугад в интервале движения, причём времена ожидания автобусов первого и второго маршрута независимы. Найти вероятность того, что пассажир уедет с остановки не позднее, чем через 5 мин., считая, что он садится в первый подошедший автобус любого маршрута.

1.14. На отрезке $AB$ длины единица наугад независимо ставятся точки $M$ и $N$. Найти вероятность того, что точка $M$ расположена ближе к точке $A$, чем к точке $N$.

1.15. Бросают круглую монету диаметра $d = 3$ так, что её центр можно считать выбранным наугад на отрезке $[-5,\ 5]$ на числовой прямой. Найти вероятность того, что ровно один конец отрезка $[-1,\ 1]$ той же числовой прямой будет покрыт монетой.

1.16. Отрезок длины единица делится двумя точками, выбранными независимо наугад, на три части. Найти вероятность того, что средняя часть длиннее любой из двух крайних.

1.17. В окружности с центром $O$ и радиусом единица проведён фиксированный диаметр $AB$. Из центра окружности выпускают луч, который пересекает окружность в точке $M$. Найти вероятность того, что площадь треугольника $AOM$ меньше $1/4$, считая, что направление луча выбирается наугад.

1.18. Расстояние по прямой дороге между деревнями $A$ и $B$ равно 10 км. Из деревни $A$ в деревню $B$ выходит пешеход и идёт со скоростью 5 км./час. Через время $\tau$, выбранное наугад из промежутка длиной 1 час от момента выхода первого пешехода, из деревни $B$ в деревню $A$ выходит второй пешеход и также идёт со скоростью 5 км./час. Найти вероятность того, что пешеходы встретятся менее чем через 40 минут после выхода второго.

1.19. В равностороннем треугольнике $ABC$ наугад выбирают точку $O$ и принимают её за центр круга, касающегося стороны $AB$. Найти вероятность того, что этот круг не выйдет за границы треугольника.

## 2. Условная вероятность, независимость, формула Байеса и формула полной вероятности.

2.1. Вероятность того, что студент сдаст зачёт, равна 0.8. Если зачет сдан, то студент допускается до экзамена. Вероятность успешной сдачи экзамена равна 0.9. Какова вероятность, что студент сдаст и зачёт, и экзамен?

2.2. Из десяти монет одна имеет герб с обеих сторон, а остальные девять – только с одной стороны. Наугад выбранную монету бросают три раза. С какой вероятностью она все три раза упадёт гербом вверх?

2.3. В лаборатории имеются четыре прибора. Вероятность того, что прибор не выйдет из строя за время эксперимента, равна 0.8, 0.85, 0.9 и 0.95 для первого, второго, третьего и четвёртого приборов соответственно. Найти вероятность того, что наудачу выбранный прибор проработает до окончания эксперимента.

2.4. В распоряжении экспериментатора имеются только чёрные и белые шары. Известно, что в ящике находятся $n$ шаров, их цвета неизвестны. Экспериментатор бросает в ящик один белый шар, и затем наудачу вынимает один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый, если равновероятны все предположения о числе белых шаров, изначально находившихся в ящике.

2.5. Две лампы в цепи соединены последовательно. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени для первой лампы равна $p_1$, для второй равна $p_2$. Цепь перестала проводить ток. Найти вероятность того, что перегорела первая лампа, а вторая исправна, если считать, что лампы отказывают независимо.

2.6. Группа студентов состоит из 5 отличников, 15 хорошо успевающих и 10 успевающих слабо студентов. Отличник на экзамене может получить только оценку «отлично», хорошо успевающий студент равновероятно получает либо «отлично», либо «хорошо», слабо успевающий равновероятно может получить оценки «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». Найти вероятность того, что наугад вызванный студент получит оценку не ниже «хорошо».

2.7. Контрольная работа состоит из шести задач, причём для получения зачёта необходимо решить любые четыре задачи. Если студент берется только за четыре задачи, то вероятность получить за время, отведённое на зачёт, правильный ответ в каждой из них равна 0.8. Если он попробует решить пять задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0.7, а если возьмётся за решение шести задач, то вероятность правильного решения будет равна 0.6. За сколько задач должен браться студент, чтобы вероятность получить зачёт была максимальна?

2.8. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике лежат 9 белых шаров, во втором – 5 белых и 4 чёрных шара, в третьем – 9 черных шаров. В выбранный наугад ящик положили белый шар, перемешали и вынули один шар. Он оказался белым. Найдите вероятность того, что шар вынут из второго ящика.

2.9. Вероятность того, что пассажир выберет автобус, равна $2/3$, с вероятностью $1/3$ он поедет на трамвае. Время в пути можно считать выбранным наугад из промежутка $[10, 30]$ (в минутах) для автобуса и из промежутка $[15, 20]$ для трамвая. Пассажир потратил на дорогу менее 18 минут. Что вероятнее: он ехал автобусом или трамваем?

2.10. В группе 6 сильных бегунов, каждый из них пробегает этап эстафеты за время, которое можно считать выбранным наугад из отрезка $[14, 16]$ (в секундах), и 4 слабых бегуна, для каждого из которых это время выбирается наугад из отрезка $[15, 17]$. Из группы по жребию выбирают двух спортсменов, которые последовательно бегут два этапа эстафеты. Найти вероятность того, что они пробежали два своих этапа за суммарное время менее 31 сек.

2.11. Цепь состоит из двух ламп, соединённых параллельно, и двух ламп, присоединённых к этому блоку последовательно. Каждая лампа выходит из строя независимо от остальных с вероятностью $q$. Найти вероятность того, что цепь будет проводить ток.

2.12. В экзаменационном билете четыре теоретических вопроса и задача. Для получения высокой оценки нужно решить задачу и ответить не менее чем на два вопроса или, не решив задачу, ответить на все теоретические вопросы. Вероятность правильного решения задачи равна $a$, вероятность правильного ответа на любой из теоретических вопросов равна $b$. Считая, что результаты по каждому пункту билета независимы, найти вероятность получить высокую оценку.

## 3. Биномиальная схема независимых испытаний. Асимптотика Пуассона и Муавра–Лапласа.

3.1. Два игрока трижды подбрасывают по монете. Найти вероятность того, что у них хотя бы раз совпадут результаты бросания.

3.2. Вероятность того, что событие $A$ появится хотя бы один раз в двух независимых испытаниях, равна $3/4$. Найти вероятность появления события $A$ в одном испытании.

3.3. Два стрелка поочередно стреляют в мишень до первого попадания, причем первый при каждом выстреле попадает в мишень с вероятностью 0.2, а второй – с вероятностью 0.3. Какова вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй?

3.4. Монету бросают $2n$ раз. Какое число появлений герба будет наиболее вероятным? Ответ обосновать.

3.5. Вероятность выпуска бракованного изделия равна $p = 0.2$. Изделия подвергают проверке, которая пропускает брак с вероятностью $a = 0.1$ и никогда не ошибается при анализе годного изделия. Найти вероятность того, что из 12 изделий не менее 10 пройдут проверку.

3.6. Частица совершает прыжки по целочисленным точкам действительной прямой, прыгая вправо на расстояние, равное единице, с вероятностью $p$ или совершая такой же прыжок влево с вероятностью $q = 1 - p$. Найти вероятность того, что в результате пятого прыжка она уйдёт на расстояние 3 от начальной точки (в любом направлении).

3.7. Вероятность успеха в одном испытании Бернулли равна 0.8. Сколько надо произвести испытаний, чтобы наиболее вероятное число успехов было равно 20?

3.8. Симметричную монету бросают до тех пор, пока она дважды подряд не выпадет вверх одной и той же стороной. Найти вероятность того, что опыт окончится не позже, чем на шестом бросании.

3.9. Жюри состоит из нечётного числа $2n + 1$ экспертов. Каждый эксперт независимо от остальных принимает верное решение с вероятностью $p = 0.8$. Жюри выносит окончательное решение большинством голосов. Каково должно быть минимальное количество экспертов, чтобы вероятность того, что жюри примет правильное решение, стала больше 0.95?

3.10. Вероятность выигрыша одного билета в лотерее равна 0.01. Оценить вероятность того, что среди 300 купленных билетов будет два выигрыша. Провести такие же оценки для хотя бы одного выигрыша и для события, заключающегося в том, что случились два или три выигрыша.

3.11. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний постоянна и равна 0.75. Оценить вероятность того, что частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0.0001.

3.12. В некоторой стране 10 млн. избирателей, из которых 4 млн. являются сторонниками партии А и 6 млн. – сторонниками партии Б. По жребию выбраны 20 тыс. выборщиков. Оценить вероятность того, что среди выборщиков сторонники партии А составляют большинство.

3.13. Рыбак бросает спиннинг. В среднем одна рыба приходится на $m$ забросов. Найти $m$ из условия, что вероятность за 100 бросков поймать хотя бы одну рыбу, будет больше 0.9.

3.14. Вероятность того, что из источника вылетит частица с энергией, выше заданного порогового значения, равна $p = 10^{-4}$. Поток из $2 \cdot 10^5$ частиц всех возможных энергий проходит последовательно через первый и второй детекторы (ловушки), которые реагируют только на частицы с энергией выше пороговой. Первый детектор ловит и задерживает такую частицу с вероятностью 0.9, а все не пойманные им частицы попадают во второй детектор, который регистрирует частицу с вероятностью 0.5. Оценить вероятность того, что в результате опыта останутся незарегистрированным не более 7 частиц с энергией выше пороговой.

3.15. Четыреста пациентов получили лекарство для понижения давления. После приёма лекарства у 220 пациентов давление понизилось, у 180 – нет. Предположив, что понижение давления носит случайный характер (с вероятностью успеха 1/2), оценить вероятность того, что разница между количеством пациентов, у которых понизилось давление, и количеством тех, на кого лекарство не оказало действия, превысит 40 человек.

## 4. Общие свойства вероятности событий.

4.1. Пусть $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$. Найти наибольшую и наименьшую возможную вероятность события $A \cap B$.

4.2. События $A$, $B$, $C$ независимы, и заданы $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$, $P(C) = 0.6$. Найти $P(A \cup B) \cap (B \cup C)$ и $P(A \backslash (B \cap C))$.

4.3. Известно, что $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(A|B) = 0.5$. Найти $P(A \cup B)$.

4.4. Пусть $A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ и $P(A_1) = 1/3$, $P(A_k \backslash A_{k-1}) = 1/3^k$ для $k = 2, 3, \ldots$ . Найти $\lim P(A_n)$ при $n \to \infty$.

4.5. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ и $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Составить алгебру $\mathcal{F}$ из восьми подмножеств множества $\Omega$, содержащую $A$ и $B$. Найти вероятности всех событий в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, если известно, что $P(A) = 1/2$, $P(B) = 5/6$.

## 5. Случайные величины.

5.1. Даны две дискретные независимые случайные величины, $\xi$ и $\eta$. Известно, что $P(\xi = 1) = 0.4$, $P(\xi = 2) = 0.6$, $P(\eta = 3) = 0.8$, $P(\eta = 4) = 0.2$. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

5.2. Среди восьми деталей ровно две имеют дефект. Наугад выбирают без возвращения две детали. Найти распределение числа годных деталей среди выбранных.

5.3. Плотность вероятности случайной величины $\xi$ имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\ x > \pi \\ (\sin x)/2, & 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $\xi$ и вычислить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0, \pi/4)$.

5.4. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Найти её плотность вероятности, если известно, что математическое ожидание $M\xi = 8$, а дисперсия $D\xi = 1/3$.

5.5. Случайная величина $\xi$ принимает целые неотрицательные значения. При этом $P(\xi = k) = C \cdot 3^{-k}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$ . Найти значение константы $C$ и $P(\xi < 3)$.

5.6. Независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_4$ принимают равновероятно целые значения от 0 до 4. Найти $P(\xi_1 \ldots \xi_4) = 0$.

5.7. Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы и каждая из них равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность вероятности случайной величины $\xi - \eta$.

5.8. Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы, $\xi$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, а $\eta$ принимает значения 1 и $-1$ с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. Найти плотность вероятности случайной величины $\xi\eta$.

5.9. На координатной плоскости нарисован равносторонний треугольник $ABC$, вершина $A$ расположена в начале координат, $A = (0, 0)$, вершина $C$ лежит на оси абсцисс, $C = (1, 0)$. В треугольник наугад бросают точку так, что вероятность попадания в область внутри треугольника пропорциональна площади этой области. Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ – декартовы координаты этой точки. Найти совместную плотность вероятности случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$.

5.10. Точка выбирается наугад на поверхности расположенной в начале декартовой системы координат единичной сферы (т. е. так, что вероятность попадания точки в область на поверхности сферы пропорциональна площади области). Найти плотность распределения аппликаты ($z$-координаты) точки.

5.11. Случайные величины $\xi_1, \xi_2$ независимы и имеют нормальное распределение $\mathbf{N}(0, 1)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\xi_1 - \xi_2$.

5.12. Случайные величины $\xi_1, \xi_2$ независимы и имеют нормальное распределение $\mathbf{N}(0, 1)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\xi_1^2 + \xi_2^2$.

## 6. Математическое ожидание, дисперсия, коэффициент ковариации. Неравенства Чебышёва и Коши–Буняковского.

6.1. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрываются 5 палаток и 10 рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку или рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях). Найти среднее время, если турист хочет выиграть и палатку, и рюкзак.

6.2. Производится 10 независимых испытаний с вероятностью успеха $p = 0.6$ в каждом испытании. Пусть $\xi$ – число успехов в испытаниях с номерами $1, 2, \ldots, 7$, $\xi$ – число успехов в испытаниях с номерами $5, 6, \ldots, 10$. Найдите дисперсию $D(\xi + 2\eta)$.

6.3. Во сколько раз изменится максимальное значение плотности вероятностей нормально распределенной случайной величины, если ее дисперсия увеличится в 9 раз?

6.4. Измеряется длина стержня с аддитивной погрешностью, математическое ожидание которой равно нулю, а дисперсия равна 0.04 см$^2$. Оценить вероятность того, что результат измерения будет отличаться от длины стержня более чем на 0.5 см.

6.5. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин равна 4. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий по абсолютной величине не превысит 0.2.

6.6. Математическое ожидание модуля начальной скорости частицы равно 600 м/с. Оценить вероятность того, что могут наблюдаться частицы, летящие со скоростью более 900 м/с.

6.7. Если среднее значение модуля начальной скорости частицы равно 600 м/с, то какие значения скорости частицы можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0.4?

6.8. Игральная кость подбрасывается 180 раз. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что пять очков появится от 24 до 36 раз. Оценить вероятность этого же события, пользуясь интегральной теоремой Муавра–Лапласа.

6.9. Вероятность регистрации частицы счётчиком равна 0.8. Пролетело 800 частиц. Указать интервал, внутри которого с вероятностью 0.5 лежит число зарегистрированных частиц.

6.10. Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимые и распределены по показательному закону (их плотность вероятности имеет вид $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x > 0$, где постоянная $\lambda$ своя для каждой случайной величины), причём $M\xi = 1$, $M\eta = 2$. Найти $\mathrm{cov}(\xi\eta, \xi - \eta)$.

6.11. Математические ожидания и дисперсии независимых нормальных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ равны 1. Найти $P(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 > 3)$.

6.12. Случайная величина $\xi$ имеет плотность вероятности $p(x) = 1 - |x|$ для $-1 < x < 1$. Найти $M \max(\xi, 0)$.

6.13. Случайная величина $\xi$ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Запишем её двоичное разложение: $\xi = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots$ (здесь $\alpha_i = 0$ или $\alpha_1 = 1$). Найти $\mathrm{cov}(\alpha_1, \alpha_2)$.

6.14. Совместное дискретное распределение с.в. $\xi_1$ и $\xi_2$ задано следующей таблицей (элемент на пересечении $i$-го столбца и $k$-й строки задает $P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = z_k)$):

| | $\xi_1 = 0$ | $\xi_1 = 1$ |
|---|---|---|
| $\xi_2 = 0$ | $\dfrac{x}{2}$ | $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}$ |
| $\xi_2 = 1$ | $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}$ | $\dfrac{x}{2}$ |

Найти $x$ из условия, что коэффициент корреляции с.в. $\xi_1$ и $\xi_2$ равен $1/3$.

6.15. Известно, что $P(\xi = 1) = 0.2$, $P(\xi = -1) = 0.8$, случайная величина $\eta$ распределена дискрентно и условные математические ожиания $M(\eta|\xi = 1) = M(\eta|\xi = -1) = 1$. Найти $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

6.16. Средние ежедневные расходы составляют 1 000 рублей, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 рублей. Оценить вероятность того, что расходы в любой наугад выбранный день не превысят 2 000 рублей, используя классическое неравенство Чебышёва для $P(|\xi - M\xi| \geqslant \epsilon)$ и неравенство Чебышёва для $P(\xi \geqslant \epsilon)$ для случайной величины, для которой $P(\xi 0) = 1$.

6.17. Случайная величина $\xi$ имеет плотность распределения $p(x) = 2x$ при $0 < x < 1$. Найти $M\xi$, $M(2\xi^4 - 1)$ и $M(1 + \xi)^{-1}$.

6.18. Случайная величина $\xi$ имеет стандартное распределение Коши (её плотность вероятности равна $p(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1 + x^2}$ для $-\infty < x < \infty$). Найти $M \min(|\xi|, 1)$.

6.19. Времена ожидания автобуса и маршрутного такси независимы и равномерно распределёны на отрезках $[0, 1]$ и $[0, 2]$ соответственно. Проезд в автобусе и в маршрутном такси стоит 40 руб и 50 руб соответственно. Сколько в среднем пассажир потратит в месяц на свои поездки, если считать, что пассажир садится в первый подошедший транспорт и пользуется транспортом 20 раз в месяц.

6.20. Частица совершает прыжки по целочисленным точкам действительной прямой, прыгая вправо на расстояние, равное единице, с вероятностью $p = 0.4$ или совершая такой же прыжок влево с вероятностью $q = 1 - p = 0.6$. Найти математическое ожидание расстояния, на которое она может уйти за три прыжка.