ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2026 г.

Предварительный письменный опрос. Список вопросов.

В конкретных вопросах, предложенных на экзамене, возможны варианты задания без изменения сути вопроса: по сравнению с представленным списком могут быть изменены численные значения, вид событий, вероятности которых нужно вычислить, функции, задающие распределения случайных величин, физические условия, задающие случайную величину, и пр. Некоторые возможные варианты вопроса в списке перечислены через косую черту.

Основы теории множеств, аксиоматические свойства вероятности и следствия из них.

1. Пусть $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$. Какое множество называется верхним/нижним пределом этой последовательности множеств?

2. Пусть $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$. При каком условии эта последовательность множеств имеет предел?

3. Пусть $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ и A^* (A_*) – верхний (нижний предел) этой последовательности. Верно ли, что если $\omega \in A^*$ ($\omega \in A^*$), то $\omega \in A_k$ для любого $k = 1, 2, \ldots$?

4. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется алгеброй подмножеств?

5. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется **сигма**-алгеброй подмножеств?

6. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторая **алгебра** подмножеств множества элементарных исходов Ω. Выберите всегда верные утверждения: (**I**) любой элементарный исход $\{\omega\} \in \mathcal{F}$; (**II**) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$; (**III**) $\Omega \in \mathcal{F}$.

7. Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств множества Ω, если $A \subset \Omega$ и $B \subset \Omega$ удовлетворяют условиям $A \cup B = \Omega$ и $A \cap B = \varnothing$? Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств множества Ω, если выполнено только условие $A \cup B = \Omega$?

8. Пусть $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра событий и $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Выберите верные утверждения.
   1. Верхний предел этой последовательности событий принадлежит $\mathcal{F}$.
   2. Верхний предел этой последовательности событий образуют все те и только те элементарные исходы, которые влекут все события начиная с некоторого номера.
   3. Нижний предел этой последовательности событий образуют все те и только те элементарные исходы, которые влекут все события начиная с некоторого номера.

9. Какое свойство вероятности называется **сигма**-аддитивностью?

10. Какие из перечисленных свойств вероятности вводятся аксиоматически: (**I**): $P(A) \geqslant 0$; (**II**): $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$; (**III**): $P(A \cap B) = P(A)P(B)$?

11. Пользуясь свойством конечной аддитивности, выведите из аксиом вероятности равенство $P(A) - P(B) = P(A \backslash B)$ при $A \supset B$.

12. Как определяется попарная независимость событий $A_1, \ldots, A_n$ и их независимость в совокупности?

13. Известно, что A и B — независимые события. Можно ли утверждать, что при этом условии события $\bar{A}$ и $A \cap B$ также всегда независимы?

14. Напишите формулу полной вероятности и условия, при которых она верна.

15. Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ попарно несовместны, но $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k \neq \Omega$. Запишите верную формулу, поставив наиболее строгий знак из $=, \neq, <, >, \leqslant, \geqslant$ вместо звёздочки в формуле $P(A) * \sum\limits_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$ для произвольного события A (наиболее строгим называется утверждение, из которого вытекают все остальные верные утверждения).

16. Исправьте ошибки в следующей теореме. *Пусть для событий $B_1, \ldots, B_n$ выполнены условия $P(B_j) \neq 0$ и $B_i \cap B_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$, тогда для любого события A имеет место равенство $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k \,|\, A)P(B_k)$.*

17. Напишите формулу Байеса для $P(A_k\,|B)$, где A_k – одно событие из полной группы попарно несовместных событий.

18. Пусть все упомянутые ниже условные вероятности существуют. Верно ли, что всегда справедливы следующие равенства: $P\big(\bar{A}\,|B\big) = 1 - P(A|B)$; $P\big(A|\overline{B}\,\big) = 1 - P(A|B)$?

19. Запишите условия на k, n, p $(q = 1 - p)$, при которых $C_n^k p^k q^{n-k} \to \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Здесь λ – заданная постоянная, $0 < \lambda < \infty$.

20. Запишите условия на n, k, p, x, s, при которых равен 1 предел следующего отношения: $\dfrac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{(2\pi s)^{-1/2} e^{-x^2/(2s)}}$.

21. Пользуясь теоремой Муавра–Лапласа/неравенством Чебышёва, запишите, с какой вероятностью частота успеха p в серии из n биномиальных испытаний Бернулли отличается по модулю от p больше, чем на $0.1p$.

22. Сформулируйте лемму Бореля–Кантелли.

Теория случайных величин.

23. Дайте определение случайной величины ξ, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

24. Пусть $F(\,\cdot\,)$ – функция распределения произвольной случайной величины ξ. Выразите через $F(\,\cdot\,)$ вероятности $P(\xi > x)$, $P(\xi = 1)$.

25. Известно, что $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. Функция распределения случайной величины ξ при $0 < x \leqslant 1$ может иметь вид (**I**) $F(x) = x^2$, (**II**) $F(x) = 1 - x$, (**III**) $F(x) = 1 - e^{-x}$. Выберите верные утверждения.

26. Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$, любой случайной величины всегда является (**I**) непрерывной в каждой точке; (**II**) может иметь только разрывы первого рода (существуют, но не совпадают левое и правое предельные значения функции); (**III**) может иметь разрывы первого и второго рода (возможно, не существуют левое или правое предельные значения функции); (**IV**) непрерывна слева ; (**V**) непрерывна справа. Укажите верные утверждения.

27. Сформулируйте, при каких условиях распределение случайной величины ξ является дискретным.

28. Сформулируйте, при каких условиях распределение случайной величины ξ является абсолютно непрерывным.

29. Дайте определение плотности вероятности случайной величины ξ.

30. Какие из приведённых ниже функций $p(\,\cdot\,)$ могут быть плотностями вероятности (считается, что вне указанного для данной функции интервала $p(x) \equiv 0$): (**I**) $p(x) = 1/x^2$ при $x > 1$, (**II**) $p(x) = \sin x$ при $-\infty < x < \infty$, (**III**) $p(x) = 3 - 4x$ при $0 < x < 1$.

31. Пусть в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$ задана плотность вероятности $p(x)$ абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Как найти значение функции распределения $F(x)$ в каждой точке x?

32. При каком условии случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы попарно; некоррелированы?

33. Пусть ξ и η независимые случайные величины, а случайные величины $\alpha = f(\xi)$ и $\beta = g(\eta)$. Можно ли утверждать, что тогда обязательно α и β независимы?

34. Как определяется совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$?

35. Пусть для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ задано значение $p(x_1, x_2)$ совместной плотности вероятности абсолютно непрерывных случайных величин ξ_1, ξ_2. Напишите явную формулу, позволяющую найти значение совместной функции распределения $F(x_1, x_2)$.

36. Задана $F_{\xi,\eta,\zeta}(x, y, z)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ, η, ζ. Как выражается через неё $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ?

37. Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η. Как найти плотность $p_\xi(x)$ вероятности случайной величины ξ?

38. Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η. Как найти условную плотность $p_{\xi|\eta}(x|y)$ вероятности случайной величины ξ?

39. Заданы $P(\xi = x_k) = p_k$ для $k = 1, 2, \ldots$. Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (напишите явные формулы), и при каком условии моменты считаются существующими?

40. Для всех $x \in \mathbb{R}$ задана $p(x)$ — плотность вероятности случайной величины ξ. Запишите явные формулы для расчёта $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$.

41. Пусть $P(\xi = 2^n) = P(\xi = -2^n) = p_n$, где $p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Можно ли утверждать, что у такой случайной величины $M\xi = 0$?

42. Известно, что все $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$ существуют. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда верно равенство $M(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = M\xi_1 + \cdots + M\xi_n$?

43. Дано, что $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$ существуют и случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы попарно или в совокупности/некоррелированы ($\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_j) = 0$ при $k \neq j$). Верно ли, что при этих условиях всегда $M(\xi_1 \ldots \xi_n) = M\xi_1 \ldots M\xi_n$?

44. Пусть моменты $M\xi$ и $M\xi^2$ существуют. Какое из соотношений всегда верно:
(а) $M\xi^2 = (M\xi)^2$, (б) $M\xi^2 \leqslant (M\xi)^2$, (в) $M\xi^2 \geqslant (M\xi)^2$.

45. Как распределена случайная величина ξ, если $M\xi^2 = (M\xi)^2$?

46. Как определяется коэффициент ковариации случайных величин ξ и η?

47. Что такое коэффициент **корреляции** случайных величин ξ, η и **какие значения** он может принимать?

48. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют одинаковую дисперсию σ^2. Чему равна $D(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3)$?

49. Верно ли, что из попарной независимости/некоррелированности/совокупной независимости случайных величин вытекает равенство $D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n$ (считается, что все дисперсии существуют)?

50. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и распределены нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Найдите $M(\xi_1 + 2\xi_2^2)$, не вычисляя интегралов.

51. Запишите неравенство Чебышёва.

52. Запишите неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

53. Задана $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Выразите через f характеристическую функцию случайной величины $a\xi + b$, где a, b – постоянные.

54. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены. Пусть $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_k. Выразите через f характеристическую функцию случайной величины случайной величины $\xi_1 + \dots + \xi_n$.

55. Запишите формулу, задающие распределение Пуассона/биномиальное распределение.

56. Запишите явную формулу для плотности вероятности, задающую нормальное распределение с параметрами μ, σ^2/равномерное распределение на отрезке $[a, b]$/экспоненциальное (показательное) распределение с параметром $a > 0$.

57. Пусть случайная величин ξ распределена дискретно ($P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$) или абсолютно непрерывно (задана $p(\,\cdot\,)$ – плотность вероятности ξ). Запишите в явном виде формулы, позволяющие в обоих случаях рассчитать характеристическую функцию случайной величины ξ.

58. Что такое сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин к случайной величине ξ с вероятностью единица/в среднем квадра тичном/по вероятности/по распределению?

59. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ одинаково распределены, независимы, $D\xi_k < \infty$, $M\xi_k = \mu$. Сформулируйте для этой последовательности закон больших чисел.

60. Запишите плотность вероятности/функцию распределения (не название распределения) случайной величины, к которой стремится $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ при $n \to \infty$, где случайные величины ξ_k независимы в совокупности, одинаково распределены и $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$.

Простейшие задачи и вероятностные модели.

61. Последовательность подмножеств действительной прямой имеет вид $[-1/n, 1 + 1/n]$, $n = 1, 2, \dots$. Какое множество точек на действительной прямой есть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (запишите числовые границы множества в явном виде)?

62. События A, B независимы и $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.6$. Найдите $P(A\backslash B)$ и $P(B\backslash A)$.

63. Случайная величина имеет следующее дискретное распределение: $P(\xi = 1) = 0.3$, $P(\xi = 2) = 0.3$, $P(\xi = 3) = 0.4$. Нарисуйте график её функции распределения.

64. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, и каждая из них принимает значения 0, 1 с равными вероятностями. Найдите $P\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \geqslant 1\Big)$.

65. Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение: её плотность вероятности имеет вид $p(x) = 2x$ при $0 < x < 1$. Найдите $M(1/\xi)$.

66. Случайная величина ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями 1/3. Найдите значение $M \sin \dfrac{\pi\xi}{2}$.

67. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, и каждая из них имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 4$. Найдите $M\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2\Big)$.

68. Длины сторон прямоугольника суть независимые случайные величины, распределённые равномерно на отрезках $[0;1]$ и $[0;2]$. Найдите математические ожидания площади и периметра прямоугольника.

69. Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p, вероятностью неудачи q, $p + q = 1$. Запишите формулу для вероятности того, что произошло не менее k успехов/произошло ровно k успехов, причем два первых испытания закончились успехами.

70. Запишите формулу для вероятности того, что в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p четвертый успех случился на пятнадцатом испытании и при этом до последнего испытания на протяжении пяти испытаний успехов не было.

Основы теории случайных процессов.

71. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, задан как $\xi(t) = \nu t^2$, где ν – случайная величина, распределённая нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$/равномерно на интервале $(-1, 1)$. Нарисуйте две различные возможные траектории этого процесса на одном графике.

72. Пусть случайный процесс $\xi(t), t \geqslant 0$, имеет двумерную плотность вероятности $p^{(2)}(x, t; z, s)$ при всех значениях аргументов. Запишите **явную формулу** для расчёта вероятности $P(\xi(t) + \xi(s) < 1)$.

73. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью λ. Отметьте верные утверждения:

    а) его траектории суть кусочно-постоянные функции с интервалами постоянства фиксированной длины и случайными величинами скачков в точках разрыва;

    б) его траектории суть кусочно-постоянные функции с интервалами постоянства случайной длины и фиксированными величинами скачков в точках разрыва;

в) его траектории суть кусочно-линейные непрерывные функции со случайным угол наклона.

74. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью λ. Отметьте верные утверждения:

    а) это процесс с независимыми приращениями;

    б) любые два его сечения независимы;

    в) $D\xi(t)$ линейно возрастает по переменной t;

    г) $D\xi(t)$ квадратично возрастает по переменной t

75. Частица начинает из нуля случайные блуждания, прыгая вправо с вероятностью p и влево с вероятностью q, $p + q = 1$. Найдите вероятность того, что за 6 шагов она вернётся в начальную точку.

76. Частица начинает из точки $x = 1$ случайные блуждания, прыгая вправо с вероятностью p и влево с вероятностью q, $p+q = 1$. Найдите вероятность того, что за 8 шагов она вернётся в начальную точку и всё время блужданий будет находиться строго правее нуля.

77. Пусть $w(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Винера с параметром $\sigma^2 = 1$, начинающийся в нуле. Запишите совместную плотность вероятности случайных величин $w(t)$ и $w(2t) - w(t)$.

78. Траектории процесса Винера:

    а) монотонно возрастают с вероятностью единица;

    б) испытывают единичные скачки в случайные моменты времени;

    в) симметрично распределены относительно уровня $x = 0$, т. е. $P(w(t)>0) = P(w(t)<0)$.

    Отметьте верные утверждения.

79. Покажите, что для процесса Винера $w(t)$, $t \geqslant 0$, имеет место среднеквадратичная сходимость $M\big(w(t+h) - w(t)\big)^2 \to 0$ при $h \to +0$ для любого фиксированного $t > 0$.

80. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$. При каком условии эти случайные величины образуют цепь Маркова?

81. Отметьте верные утверждения:
    1) последовательность **независимых** случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ образует цепь Маркова;
    2) в цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ случайные величины ξ_n и ξ_{n+m} при $m \geqslant 2$ **всегда** независимы;
    3) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль строки

равна единице;

4) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль столбца равна единице;

5) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма всех её элементов равна единице;

6) у любой цепи Маркова существуют финальные вероятности;

7) если существуют финальные вероятности, то существует стационарное (т. е. не меняющееся от шага к шагу) распределение.

82. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, матрица перехода имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Задано начальное распределение $P(\xi_0 = 1) = 1/3$, $P(\xi_0 = 2) = 2/3$. Найдите распределение случайной величины ξ_1.

83. Однородная цепь Маркова с состояниями $x_i, \ldots, x_s$ имеет финальное распределение $p_k^* = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{jk}^{(n)}$ для $k = 1, \ldots, s$, которое совпадает с начальным: $P(\xi_0 = x_k) = p_k^*$ для $k = 1, \ldots, s$. Чему равна $P(\xi_n = x_k)$ на заданном шаге n?

84. Заданы матрица переходных вероятностей $\pi(\,\cdot\,)$ для марковского процесса с состояниями $x_1, \ldots, x_s$ и начальное распределение $P(\xi(0) = x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots s$. Как найти совместное распределение двух сечений $\xi(t)$ и $\xi(u)$ процесса при $0 < u < t$?

85. Марковский процесс имеет два возможных состояния и матрицу переходных вероятностей $\pi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-4t} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4t} \end{pmatrix}$. Запишите в явном виде матрицу Λ системы дифференциальных уравнений Колмогорова.