ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2024 г.

Предварительный письменный опрос. Список вопросов.

В конкретных вопросах, предложенных на экзамене, возможны варианты задания без изменения сути вопроса: по сравнению с представленным списком могут быть изменены численные значения, вид событий, вероятности которых нужно вычислить, функции, задающие распределения случайных величин, физические условия, задающие случайную величину, и пр. Некоторые возможные варианты вопроса в списке перечислены через косую черту.

Основы теории множеств, аксиоматические свойства вероятности и следствия из них.

1. Запишите свойства ассоциативности (правило расстановки скобок в однородном ряду операций), коммутативности (перестановочности), дистрибутивности (правило раскрытия скобок в смешанном ряду операций) и формулы двойственности для операций объединения и пересечения множеств.

2. Упростите выражение $\overline{(A \cup \overline{B})} \cap A$ до одного множества, не содержащего операции.

3. Пусть A и B — два события. Запишите математическое выражение для множества тех исходов, при которых произойдет ровно одно/хотя бы одно из этих событий.

4. Каким условиям должны удовлетворять события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы они образовали полную группу попарно несовместных событий?

5. Пусть $A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ или $A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Какое множество есть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в каждом из этих двух случаев?

6. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется алгеброй подмножеств?

7. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется **сигма**-алгеброй подмножеств?

8. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторая **алгебра** подмножеств множества элементарных исходов Ω. Выберите всегда верные утверждения: (**I**) любой элементарный исход $\{\omega\} \in \mathcal{F}$; (**II**) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$; (**III**) $\Omega \in \mathcal{F}$.

9. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Дополните $\mathcal{F} = \Big\{\Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\Big\}$ одним подмножеством множества Ω так, чтобы $\mathcal{F}$ стало алгеброй подмножеств.

10. Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств множества Ω, если $A \subset \Omega$ и $B \subset \Omega$ удовлетворяют условиям $A \cup B = \Omega$ и $A \cap B = \varnothing$? Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств множества Ω, если выполнено только условие $A \cup B = \Omega$?

11. Пусть $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра событий и $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Выберите верные утверждения.
    1. Верхний предел этой последовательности событий принадлежит $\mathcal{F}$.
    2. Верхний предел этой последовательности событий образуют все те и только те элементарные исходы, которые влекут все события начиная с некоторого номера.
    3. Нижний предел этой последовательности событий образуют все те и только те элементарные исходы, которые влекут все события начиная с некоторого номера.

12. Какое свойство вероятности называется **сигма**-аддитивностью?

13. Какие из перечисленных свойств вероятности являются аксиомами: (**I**): $P(A) \geqslant 0$; (**II**): $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$; (**III**): $P(A \cap B) = P(A)P(B)$?

14. Пользуясь свойством конечной аддитивности, выведите из аксиом вероятности равенство $P(A) - P(B) = P(A \backslash B)$ при $A \supset B$.

15. Известно, что наступление события A влечёт наступление события B, и эти события не совпадают. Запишите верную формулу, поставив наиболее строгий знак из $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ вместо звёздочки в формуле $P(A) * P(B)$ (наиболее строгим называется утверждение, из которого вытекают все остальные верные утверждения).

16. Как определяется попарная независимость событий $A_1, \ldots, A_n$ и их независимость в совокупности?

17. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что события A и B являются и независимыми, и несовместными.

18. Известно, что A и B — независимые события. Можно ли утверждать, что при этом условии события $\bar{A}$ и $A \cap B$ также всегда независимы?

19. Как определяется вероятность того, что произойдет событие A, при условии, что произошло событие B?

20. Напишите формулу полной вероятности.

21. Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ попарно несовместны, но $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k \neq \Omega$. Запишите верную формулу, поставив наиболее строгий знак из $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ вместо звёздочки в формуле $P(A) * \sum\limits_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$ для произвольного события A (наиболее строгим называется утверждение, из которого вытекают все остальные верные утверждения).

22. Исправьте ошибки в следующей теореме. *Пусть для событий $B_1, \ldots, B_n$ выполнены условия $P(B_j) \neq 0$ и $B_i \cap B_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$, тогда для любого события A имеет место равенство* $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k \,|\, A) P(B_k)$.

23. Напишите формулу Байеса для $P(A_k \,|B)$, где A_k – одно событие из полной группы попарно несовместных событий.

24. Пусть все упомянутые ниже условные вероятности существуют. Верно ли, что всегда справедливо следующие равенства: $P\big(\bar{A}\,|B\big) = 1 - P(A|B)$; $P\big(A|\overline{B}\,\big) = 1 - P(A|B)$?

25. Запишите условия на k, n, p $(q = 1 - p)$, при которых $C_n^k p^k q^{n-k} \to \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Здесь λ – заданная постоянная, $0 < \lambda < \infty$.

26. Запишите условия на n, k, p, x, s, при которых равен 1 предел следующего отношения: $\dfrac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{(2\pi s)^{-1/2} e^{-x^2/(2s)}}$.

27. Пользуясь теоремой Муавра–Лапласа/неравенством Чебышёва, запишите, с какой вероятностью частота успеха p в серии из n биномиальных испытаний Бернулли отличается по модулю от p больше, чем на $0.1p$.

28. Сформулируйте лемму Бореля–Кантелли.

Теория случайных величин.

29. Дайте определение случайной величины ξ, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

30. Как определяется функция распределения случайной величины ξ?

31. Пусть $F(\,\cdot\,)$ – функция распределения произвольной случайной величины ξ. Выразите через $F(\,\cdot\,)$ вероятности $P(\xi > x)$, $P(\xi = 1)$.

32. Известно, что $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. Функция распределения случайной величины ξ при $0 < x \leqslant 1$ может иметь вид (**I**) $F(x) = x^2$, (**II**) $F(x) = 1 - x$, (**III**) $F(x) = 1 - e^{-x}$. Выберите верные утверждения.

33. Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$, любой случайной величины всегда является (**I**) непрерывной в каждой точке; (**II**) может иметь только разрывы первого рода (существуют, но не совпадают левое и правое предельные значения функции); (**III**) может иметь разрывы первого и второго рода (возможно, не существуют левое или правое предельные значения функции); (**IV**) непрерывна слева ; (**V**) непрерывна справа. Укажите верные утверждения.

34. В каком случае распределение случайной величины ξ является дискретным?

35. В каком случае распределение случайной величины ξ является абсолютно непрерывным?

36. Дайте определение плотности вероятности случайной величины ξ.

37. Какие из приведённых ниже функций $p(\,\cdot\,)$ могут быть плотностями вероятности (считается, что вне указанного для данной функции интервала $p(x) \equiv 0$): (**I**) $p(x) = 1/x^2$ при $x > 1$, (**II**) $p(x) = \sin x$ при $-\infty < x < \infty$, (**III**) $p(x) = 3 - 4x$ при $0 < x < 1$.

38. Функция распределения $F(\,\cdot\,)$ случайной величины ξ удовлетворяет условию $F(1) = 1$. Чему равна $P(\xi = 2)$?

39. Пусть в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$ задана плотность вероятности $p(x)$ абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Как найти значение функции распределения $F(x)$ в каждой точке x?

40. Задана плотность вероятности $p(x)$, $-\infty < x < +\infty$, абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Напишите явные формулы для расчёта $P(a < \xi < b)$, $P(\xi \leqslant a)$.

41. При каком условии случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы попарно; некоррелированы?

42. Как определяется совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$?

43. Пусть для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ задано значение $p(x_1, x_2)$ совместной плотности вероятности абсолютно непрерывных случайных величин ξ_1, ξ_2. Напишите явную формулу, позволяющую найти значение совместной функции распределения $F(x_1, x_2)$.

44. Задана $F_{\xi,\eta,\zeta}(x, y, z)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ, η, ζ. Как выражается через неё $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ?

45. Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η. Как найти плотность $p_\xi(x)$ вероятности случайной величины ξ?

46. Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η. Как найти условную плотность $p_{\xi|\eta}(x|y)$ вероятности случайной величины ξ?

47. Заданы $P(\xi = x_k) = p_k$ для $k = 1, 2, \ldots$. Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (напишите явные формулы), и при каком условии моменты считаются существующими?

48. Для всех $x \in \mathbb{R}$ задана $p(x)$ — плотность вероятности случайной величины ξ. Запишите явные формулы для расчёта $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$.

49. Пусть $P(\xi = 2^n) = P(\xi = -2^n) = p_n$, где $p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Можно ли утверждать, что у такой случайной величины $M\xi = 0$?

50. Известно, что все $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$ существуют. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда верно равенство $M(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = M\xi_1 + \cdots + M\xi_n$?

51. Дано, что $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$ существуют и случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы попарно или в совокупности/некоррелированы ($\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_j) = 0$ при $k \neq j$). Верно ли, что при этих условиях всегда $M(\xi_1 \ldots \xi_n) = M\xi_1 \ldots M\xi_n$?

52. Пусть моменты $M\xi$ и $M\xi^2$ существуют. Какое из соотношений всегда верно: (а) $M\xi^2 = (M\xi)^2$, (б) $M\xi^2 \leqslant (M\xi)^2$, (в) $M\xi^2 \geqslant (M\xi)^2$.

53. Как распределена случайная величина ξ, если $M\xi^2 = (M\xi)^2$?

54. Заданы значения $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, \ldots, n$. Как рассчитать число $M(\xi^2 + 2)$?

55. Для случайной величины ξ заданы значения её плотности вероятности $p(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Как рассчитать $M(2e^{\xi} + 2)$?

56. Как определяется коэффициент ковариации случайных величин ξ и η?

57. Что такое коэффициент **корреляции** случайных величин ξ, η и **какие значения** он может принимать?

58. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют одинаковую дисперсию σ^2. Чему равна $D(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3)$?

59. Верно ли, что из попарной независимости/некоррелированности/совокупной независимости случайных величин вытекает равенство $D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n$ (считается, что все дисперсии существуют)?

60. Запишите неравенство Чебышёва.

61. Запишите неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

62. Задана $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Выразите через f характеристическую функцию случайной величины $a\xi + b$, где a, b – постоянные.

63. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены. Пусть $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_k. Выразите через f характеристическую функцию случайной величины случайной величины $\xi_1 + \cdots + \xi_n$.

64. Какие из перечисленных далее функций могут быть характеристической функцией некоторой случайной величины: 1) $\sin t$, 2) $\cos t$, 3) $\operatorname{ctg} t$?

65. Запишите формулу, задающие распределение Пуассона/биномиальное распределение.

66. Запишите явную формулу для плотности вероятности, задающую нормальное распределение с параметрами μ, σ^2/равномерное распределение на отрезке $[a, b]$/экспоненциальное (показательное) распределение с параметром $a > 0$.

67. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найдите $M\xi$, $D\xi$, не вычисляя интегралов.

68. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и распределены нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Найдите $M(\xi_1 + 2\xi_2^2)$, не вычисляя интегралов.

69. Пусть случайная величин ξ распределена дискретно ($P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$) или абсолютно непрерывно (задана $p(\,\cdot\,)$ – плотность вероятности ξ). Запишите в явном виде формулы, позволяющие в обоих случаях рассчитать характеристическую функцию случайной величины ξ.

70. Что такое сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин к случайной величине ξ с вероятностью единица/по вероятности/по распределению?

71. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ одинаково распределены, независимы, $D\xi_k < \infty$, $M\xi_k = \mu$. Сформулируйте для этой последовательности закон больших чисел.

72. Запишите плотность вероятности/функцию распределения (не название типа распределения) случайной величины, к которой стремится $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ при $n \to \infty$, где случайные величины ξ_k независимы в совокупности, одинаково распределены и $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$.

73. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют распределение Пуассона $\mathbf{P}(\lambda)$. При каких a_n и b_n, можно утверждать, что последовательность $a_n \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k + b_n$, $n = 1, 2, \dots$, сходится по распределению при $n \to \infty$ к случайной величине, распределённой стандартно нормально?

74. Все координаты ξ_k, $k = 1, \dots, n$, случайного вектора ξ независимы и распределены по стандартному нормальному закону. Какое распределение имеет квадрат евклидовой нормы этого вектора?

75. Все координаты ξ_k, $k = 1, \dots, n$, случайного вектора ξ имеют распределение $\mathbf{N}(\mu, 1)$. Пусть $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\chi^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - \bar{\xi})^2$. При каком дополнительном условии χ^2 имеет распределение Пирсона?

76. Все координаты ξ_k, $k = 1, \dots, n$, случайного вектора ξ независимы и имеют распределение $\mathbf{N}(\mu, 1)$. Пусть $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\chi^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - \mu)^2$, $\hat{\chi}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - \bar{\xi})^2$. Какое распределение имеет каждая из случайных величин χ^2 и $\hat{\chi}^2$?

77. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют распределение $\mathbf{N}(0,1)$. Составьте из них случайную величину, которая имеет распределение Стьюдента с m степенями свободы. Здесь m фиксировано, $1 < m < n$.

Простейшие задачи и вероятностные модели.

77. Последовательность подмножеств действительной прямой имеет вид $[-1/n, 1+1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Какое множество точек на действительной прямой есть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (запишите числовые границы множества в явном виде)?

78. События A, B независимы и $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.6$. Найдите $P(A \setminus B)$ и $P(B \setminus A)$.

79. Случайная величина имеет следующее дискретное распределение: $P(\xi = 1) = 0.3$, $P(\xi = 2) = 0.3$, $P(\xi = 3) = 0.4$. Нарисуйте график её функции распределения.

80. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, и каждая из них принимает значения 0, 1 с равными вероятностями. Найдите $P\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \geqslant 1\Big)$.

81. Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение: её плотность вероятности имеет вид $p(x) = 2x$ при $0 < x < 1$. Найдите $M(1/\xi)$.

82. Случайная величина ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями 1/3. Найдите значение $M \sin \dfrac{\pi\xi}{2}$.

83. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, и каждая из них имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 4$. Найдите $M\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2\Big)$.

84. Длины сторон прямоугольника суть независимые случайные величины, распределённые равномерно на отрезках $[0;1]$ и $[0;2]$. Найдите математические ожидания площади и периметра прямоугольника.

85. Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p, вероятностью неудачи q, $p + q = 1$. Запишите формулу для вероятности того, что произошло не менее k успехов/произошло ровно k успехов, причем два первых испытания закончились успехами.

86. Запишите формулу для вероятности того, что в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p четвертый успех случился на пятнадцатом испытании и при этом до последнего испытания на протяжении пяти испытаний успехов не было.

87. Частица начинает из нуля случайные блуждания по целочисленным точкам действительной прямой, совершая независимые прыжки на расстояние единица вправо с вероятностью p и оставаясь на месте с вероятностью q, $p + q = 1$. Найдите вероятность того, что за 5 прыжков она уйдёт на расстояние $\triangle x = 3$ от нуля влево или вправо.