Список вопросов письменной части экзамена по курсу «Математическая статистика и основы теории случайных процессов». Осенний семестр 2023-2024 учебного года.

Во всех вопросах выборка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет объём n и состоит из независимых одинаково распределённых случайных величин. Все необходимые моменты распределений считаются существующими.

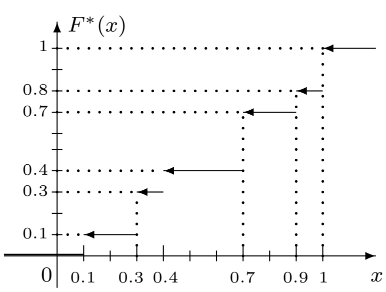
В конкретных вариантах задания могут быть изменены численные параметры, вид распределения, конкретный вид зависимости от выборки, знаки неравенств и т. д. без изменения сути вопроса.

1. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – выборка объема n из распределения $F_\theta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta$. Какие из перечисленных ниже функций можно назвать статистиками? Отметьте или перечислите пункты задания, для которых это верно.
   а) $t(\xi) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$, б) $t(\xi) = |\bar{\xi} - \theta|$, в) $t(\xi) = \prod\limits_{k\colon \xi_k \neq 0} \xi_k$.

2. Для выборочной реализации $2, 3, 6, 3, 2, 5, 3, 4, 5, 1$ найдите числовое значение четвёртой порядковой статистики.

3. По выборке ξ заданного объёма построен вариационный ряд и рассчитаны выборочное среднее $\bar{\xi}$ само́й выборки и выборочное среднее $\bar{\xi}_{(*)}$ вариационного ряда. Верно ли, что $\bar{\xi} = \bar{\xi}_{(*)}$ с вероятностью единица?

4. Выборочная функция распределения рассчитана по выборке объёма $n = 10$ и представлена на графике. Восстановите вариационный ряд выборки.



5. Каждый элемент выборки ξ объёма n имеет функцию распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Какой вид имеет функция распределения максимальной порядковой статистики $\xi_{(n)}$.

6. Максимальная порядковая статистика $\xi_{(n)}$ выборки ξ объёма n распределена равномерно на $[0, 1]$. Какой вид имеет функция распределения одного элемента выборки?

7. Пусть I – единичный оператор и Π_m – ортогональный проектор в n-мерном евклидовом пространстве, который проецирует на линейное подпространство размерности m. Верно ли, что оператор $I - \Pi$ также является ортогональным проектором и, если да, какова размерность подпространства, на которое он проецирует?

8. Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n$ – независимые стандартно нормально распределённые случайные величины. Какая функция от них имеет распределение хи-квадрат/Стьюдента с n степенями свободы?

9. Дана выборка объёма n из нормального распределения с неизвестным/нулевым средним. Отметьте, какое распределение имеет случайная величина, с помощью которой в этом случае можно построить интервальную оценку дисперсии:

   а) имеющей распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы,

   а) имеющей распределение Пирсона с n степенями свободы,

   в) имеющей нормальное распределение,

   г) имеющей распределение Пирсона с $n - 1$ степенями свободы.

10. Дана выборка объёма n из нормального распределения с неизвестной/единичной дисперсией. Отметьте, какой случайной величиной нужно воспользоваться, чтобы построить в этом случае интервальную оценку математического ожидания:

    а) имеющей распределение Стьюдента с n степенями свободы,

    а) имеющей распределение Пирсона с n степенями свободы,

    в) имеющей нормальное распределение,

    г) имеющей распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы.

11. По выборке объёма n из нормального распределения построена стандартная интервальная оценка математического ожидания с уровнем доверия γ. Как изменяется длина этой оценки, если возрастает объём выборки; если возрастает уровень доверия? Отметьте верный ответ:

    а) не изменяется с вероятностью единица;

    б) убывает с вероятностью единица;

    в) возрастает с вероятностью единица;

    г) ответ зависит от реализации выборки.

12. Каждый элемент выборки ξ объёма n распределён равномерно на $[0, 1]$ (нормально с параметрами μ, σ^2, экспоненциально с параметром A). Какой вид имеет функция правдоподобия этой выборки?

13. Пусть ξ – выборка из распределения, зависящего от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, где Θ – априори известное множество. Какая статистика $t(\xi)$ называется несмещённой оценкой значения $\tau(\theta)$, где $\tau(\,\cdot\,)$ – заданная функция на множестве Θ?

14. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – выборка из распределения, зависящего от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, где Θ – априори известное множество. Какая статистика $t(\xi)$ называется состоятельной оценкой значения $\tau(\theta)$, где $\tau(\,\cdot\,)$ – заданная функция на множестве Θ?

15. Пусть ξ – случайная выборка, $x \in \mathbb{R}^n$ – её реализация. Исправьте ошибки в следующих формулах, записав вместо них верное неравенство Крамера–Рао для точечной оценки t значения $\tau(\theta)$:
$$D_\theta t(\xi) \leqslant \frac{[\tau'(\theta)]^2}{M_\theta\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}, \qquad D_\theta t(\xi) \geqslant \frac{\tau'(\theta)}{M_\theta \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}}.$$

16. Пусть для одномерной абсолютно непрерывной случайной величины её функция правдоподобия $L(x,\theta) = p_\xi(x,\theta) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Пусть функция $\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}$, $x \in \mathbb{R}$, равномерно по θ интегрируема по $x \in \mathbb{R}$. Покажите, что
$$M_\theta \frac{\partial \ln L(\xi,\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad \text{для всех} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

17. Пусть ξ – одномерная выборка из дискретного распределения, зависящего от неизвестного параметра θ. Покажите, что $T(\xi) = \xi$ является достаточной статистикой для θ.

18. Известно, что $t(\xi)$ – несмещёная оценка значения θ. Можно ли утверждать, что тогда $at(\xi) + b$ – несмещённая оценка для $\tau(\theta) = a\theta + b$ (здесь a и b – постоянные числа)? Можно ли утверждать, что тогда $t^2(\xi)$ – несмещённая оценка для $\tau(\theta) = \theta^2$?

19. Какая из следующих статистик является несмещённой оценкой математического ожидания элемента выборки ξ:

    а) $t(\xi) = 2\xi_1 - \xi_2$, б) $\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, в) $t(\xi) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2}$?

20. Верно ли, что всякая состоятельная оценка значения $\tau(\theta)$ является несмещённой?

21. Верно ли, что если существует эффективная оценка значения $\tau(\theta)$, то эта оценка обязательно является несмещённой оценкой минимальной дисперсии?

22. Верно ли, что если существует несмещённая оценка значения $\tau(\theta)$ с минимальной дисперсией, то эта оценка обязательно является эффективной?

23. Эффективная оценка параметра θ всегда является: несмещённой, состоятельной, оценкой минимальной дисперсии, достаточной статистикой для параметра θ, оценкой максимального правдоподобия? Выберите верные свойства эффективной оценки.

24. Может ли эффективная оценка значения $\tau(\theta)$ не иметь математического ожидания, дисперсии, начального момента 3-го порядка?

25. Как выглядит оценка, построенная методом моментов по выборке $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ для параметра $\theta_1 = M\xi_k$ (для $\theta_2 = M\xi_k^2$ или $\theta_3 = D\xi_k$), $k = 1, \ldots, n$. Является ли эта оценка несмещённой?

26. Проверяется гипотеза $\xi \sim p_0(\cdot)$ против альтернативы $\xi \sim p_1(\cdot)$, где $p_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – заданные плотности вероятности одномерной выборки, $k = 1, 2$. Критерий задан своей критической функцией $\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Запишите через эти данные явные формулы для ошибки первого рода и мощности этого критерия.

27. Проверяется гипотеза $\xi \sim p_0(\cdot)$ против альтернативы $\xi \sim p_1(\cdot)$, где $p_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – заданные плотности вероятности одномерной выборки, $k = 0, 2$. Какой вид имеет критическое множество нерандомизированного наиболее мощного критерия проверки такой гипотезы?

28. По одномерной выборке ξ проверяется гипотеза $\xi \sim \mathbf{U}(-1, 1)$ против альтернативы $\xi \sim \mathbf{U}(0, 2)$. Критерий отклоняет гипотезу, всякий раз, когда $\xi > 0.8$. Чему равны ошибка первого рода и мощность такого критерия?

29. По одномерной выборке x проверяется некоторая простая гипотеза. Даны два критических множества $Z_1 = \{x > C_1\}$ и $Z_1 = \{x > C_2\}$ двух наиболее мощных критериев её проверки, имеющие ошибки первого рода α_1 и $\alpha_2 < \alpha_1$ соответственно. Сравните по величине числа C_1 и C_2.

30. Проверяется гипотеза о том, что элемент выборки имеет заданную функцию распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть $\widehat{F}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, есть выборочная функция распределения. Запишите для такой задачи критерий Колмогорова–Смирнова (задайте критическую функцию или критическое множество).

31. Каждый из элементов выборки объёма n может принимать только два значения 0 и 1. Гипотеза заключается в том, что эти значения равновероятны. Пусть n_k – количество элементов выборки, равных $k = 0, 1$, $n_0 + n_1 = n$. Какой вид имеет статистика критерия хи-квадрат для такой гипотезы и сколько степеней свободы у её асимптотического при $n \to \infty$ распределения?

32. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, задан как $\xi(t) = \nu t^2$, где ν – случайная величина, распределённая нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$ (равномерно на интервале $(-1, 1)$). Нарисуйте две различные возможные **траектории** этого процесса на одном графике.

33. Пусть случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, имеет двумерную плотность вероятности $p^{(2)}(x, t; z, s)$ при всех значениях аргументов. Запишите **явную формулу** для расчёта вероятности $P(\xi(t) + \xi(s) < 1)$.

34. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью λ. Его траектории представляют собой:

    кусочно-постоянные функции с неслучайными интервалами постоянства и случайными скачками;

    кусочно-постоянные функции со случайными интервалами постоянства и постоянными скачками;

    кусочно-линейные непрерывные функции со случайным наклоном.

    Отметьте верные утверждения.

35. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью λ. Отметьте верные утверждения:

    это процесс с независимыми приращениями;

    любые два его сечения независимы;

    $D\xi(t)$ линейно возрастает по переменной t;

36. Пусть $w(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Винера с параметром $\sigma^2 = 1$, начинающийся в нуле. Запишите совместную плотность вероятности случайных величин $w(t)$ и $w(2t) - w(t)$

37. Траектории процесса Винера:

    а) монотонно возрастают с вероятностью единица;

    б) испытывают единичные скачки в случайные моменты времени;

    в) симметричны относительно линии уровня $x = 0$, т. е. $P(w(t) > 0) = P(w(t) < 0)$.

    Отметьте верные утверждения.

38. Покажите, что для процесса Винера $w(t)$, $t \geqslant 0$, имеет место среднеквадратичная сходимость $M\big(w(t+h) - w(t)\big)^2 \to 0$ при $h \to +0$ для любого фиксированного $t > 0$.

39. Заданы матрица переходных вероятностей $\pi(\,\cdot\,)$ для марковского процесса с состояниями $x_1, \ldots, x_s$ и начальное распределение $P(\xi(0) = x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots s$. Как найти совместное распределение двух сечений $\xi(t)$ и $\xi(u)$ процесса при $0 < u < t$?

40. Марковский процесс имеет два возможных состояния и матрицу переходных вероятностей $\pi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-4t} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4t} \end{pmatrix}$. Запишите в явном виде матрицу Λ системы дифференциальных уравнений Колмогорова.