

Предварительный письменный опрос. Список вопросов.

В вариантах вопросов, предложенных на экзамене, возможны изменения по сравнению с предложенным списком: могут быть изменены численные значения, вид событий, вероятности которых нужно вычислить, функции, задающие распределения случайных величин, и пр.

Основы теории множеств, аксиоматические свойства вероятности и следствия из них.

1. Запишите свойства ассоциативности (правило расстановки скобок в однородном ряду операций), коммутативности (перестановочности), дистрибутивности (правило раскрытия скобок в смешанном ряду операций) и формулы двойственности для операций объединения и пересечения множеств.
2. Упростите выражение $\overline{(A \cup \bar{B})} \cup \bar{A}$.
3. Отметьте те утверждения для множеств (событий), которые всегда верны: (I) $A \subset C$, если $A \subset B$ и $B \subset C$, (II) $A \subset (A \cap B)$, (III) $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
4. Пусть A и B — два события. Запишите математическое выражение для множества тех исходов, при которых произойдет ровно одно/хотя бы одно из этих событий.
5. Пусть $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2\}$ — подмножества множества $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Запишите в явном виде множества $A \cap C$ и $A \Delta B \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
6. Можно ли утверждать, что события A и $\overline{A \cup B}$ никогда не реализуются вместе в одном случайном эксперименте?
7. Каким условиям должны удовлетворять события A_1, A_2, \dots, A_n , чтобы они образовали полную группу попарно несовместных событий?
8. Пусть $A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ или $A_1 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Какое множество есть $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ в каждом из этих двух случаев?
9. Какое множество \mathcal{F} подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется алгеброй подмножеств?
10. Какое множество \mathcal{F} подмножеств Ω называется **сигма**-алгеброй подмножеств?
11. Пусть \mathcal{F} — алгебра подмножеств множества Ω . Какое дополнительное условие надо наложить на \mathcal{F} , для того чтобы \mathcal{F} стала **сигма**-алгеброй?

12. Пусть \mathcal{F} – некоторая **алгебра** подмножеств множества элементарных исходов Ω . Выберите верные утверждения: **(I)** любой элементарный исход $\{\omega\} \in \mathcal{F}$; **(II)** если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$; **(III)** $\Omega \in \mathcal{F}$.
13. Дополните множество $\mathcal{F} = \{\Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ одним подмножеством так, чтобы \mathcal{F} стало алгеброй подмножеств множества $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
14. Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \emptyset\}$ алгеброй подмножеств пространства Ω , если подмножества A и B пространства Ω удовлетворяют условиям $A \cup B = \Omega$ и $A \cap B = \emptyset$? Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \emptyset\}$ алгеброй подмножеств множества Ω , если его подмножества A и B произвольны?
15. Какое свойство вероятности называется **сигма**-аддитивностью?
16. Какие из перечисленных свойств вероятности являются аксиомами: **(I)**: $P(A) \geq 0$; **(II)**: $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$; **(III)**: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$?
17. Пользуясь свойством конечной аддитивности, выведите из аксиом вероятности равенство $P(A) - P(B) = P(A \setminus B)$ при $A \supset B$.
18. Известно, что наступление события A влечёт наступление события B . Поставьте знак неравенства между $P(A)$ и $P(B)$.
19. Как определяется попарная независимость событий A_1, \dots, A_n и их независимость в совокупности?
20. Известно, что A и B – независимые события. Можно ли утверждать, что при этом условии события \bar{A} и $A \cap B$ также всегда независимы?
21. Как определяется вероятность того, что произойдет событие A , при условии, что произошло событие B ?
22. Напишите формулу полной вероятности.
23. Напишите формулу Байеса для $P(A_k | B)$, где A_k – одно событие из полной группы попарно несовместных событий.
24. Пусть все упомянутые ниже условные вероятности существуют. Верно ли, что всегда справедливо следующие равенства: $P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$; $P(A | \bar{B}) = 1 - P(A | B)$?
25. При каких условиях $\lim C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$?

Теория случайных величин.

1. Дайте определение того, что ξ есть случайная величина, заданная на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) .
2. Как определяется функция распределения случайной величины ξ ?
3. Пусть задана $F(\cdot)$ – функция распределения произвольной случайной величины ξ . Выразите через $F(\cdot)$ вероятности $P(\xi > x)$, $P(\xi = 1)$.
4. Известно, что $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. Функция распределения случайной величины ξ при $0 < x \leq 1$ может иметь вид **(I)** $F(x) = x^2$, **(II)** $F(x) = 1 - x$, **(III)** $F(x) = 1 - e^{-x}$. Выберите верные утверждения.
5. Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$, любой случайной величины всегда является **(I)** непрерывной в каждой точке; **(II)** может иметь только разрывы первого рода (существуют, но не совпадают левое и правое предельные значения функции); **(III)** может иметь разрывы первого и второго рода (возможно, не существуют левое или правое предельные значения функции); **(IV)** непрерывна слева; **(V)** непрерывна справа. Укажите верные утверждения.
6. Какие из приведённых ниже функций $p(\cdot)$ могут быть плотностями вероятности (считается, что вне указанного для данной функции интервала $p(x) \equiv 0$): **(I)** $p(x) = 1/x^2$ при $x > 1$, **(II)** $p(x) = \sin x$ при $-\infty < x < \infty$, **(III)** $p(x) = 3 - 4x$ при $0 < x < 1$.
7. Пусть в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$ задана плотность вероятности $p(x)$ случайной величины ξ . Как найти значение функции распределения $F(x)$ в каждой точке x ?
8. Задана плотность вероятности $p(x)$, $-\infty < x < +\infty$, абсолютно непрерывной случайной величины ξ . Напишите явные формулы для расчёта $P(a < \xi < b)$, $P(\xi \leq a)$.
9. При каком условии случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы попарно; некоррелированы?
10. Как определяется совместная функция распределения случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n ?
11. Пусть для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ задано значение $p(x_1, x_2)$ совместной плотности вероятности случайных величин ξ_1, ξ_2 . Напишите явную формулу, позволяющую найти значение совместной функции распределения $F(x_1, x_2)$.
12. Задана $F_{\xi, \eta, \zeta}(x, y, z)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ, η, ζ . Как выражается через неё $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ ?

13. Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η . Как найти плотность $p_{\xi}(x)$ вероятности случайной величины ξ ?
14. Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η . Как найти условную плотность $p_{\xi|\eta}(x|y)$ вероятности случайной величины ξ ?
15. Заданы $P(\xi = x_k) = p_k$ для $k = 1, 2, \dots$. Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (напишите явные формулы) и при каком условии моменты считаются существующими?
16. Для всех $x \in \mathbb{R}$ задана $p(x)$ — плотность вероятности случайной величины ξ . Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (напишите явные формулы) и при каком условии моменты считаются существующими?
17. Известно, что все $M\xi_1, \dots, M\xi_n$ существуют. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда верно равенство $M(\xi_1 + \dots + \xi_n) = M\xi_1 + \dots + M\xi_n$?
18. Дано, что $M\xi_1, \dots, M\xi_n$ существуют и некоррелированы, $\text{cov}(\xi_k, \xi_j) = 0$ при $k \neq j$. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда $M(\xi_1 \dots \xi_n) = M\xi_1 \dots M\xi_n$?
19. Заданы значения $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, \dots, n$. Как рассчитать число $M(\xi^2 + 2)$?
20. Для случайной величины ξ заданы значения её плотности вероятности $p(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Как рассчитать $M(2e^{\xi} + 2)$?
21. Как определяется коэффициент ковариации случайных величин ξ и η (достаточно записать общее определение)?
22. Что такое коэффициент **корреляции** случайных величин ξ, η и **какие значения** он может принимать?
23. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 . Чему равна $D(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3)$?
24. Верно ли, что из попарной независимости, некоррелированности, совокупной независимости случайных величин вытекает равенство $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$ (считается, что все дисперсии существуют)?
25. Запишите неравенство Чебышёва.
26. Запишите неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.
27. Задана $f(\cdot)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Выразите через f характеристическую функцию случайной величины $a\xi + b$, где a, b — постоянные?

28. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и одинаково распределены. Пусть $f(\cdot)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_k . Выразите через f характеристическую функцию случайной величины $\xi_1 + \dots + \xi_n$?
29. Запишите формулу, задающие распределение Пуассона/биномиальное распределение.
30. Запишите формулу для плотности вероятности случайной величины ξ , задающие нормальное распределение с параметрами μ, σ^2 и равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.
31. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид $p(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найдите $M\xi, D\xi$, не вычисляя интегралов.
32. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и распределены нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Найдите $M(\xi_1 + 2\xi_2^2)$, не вычисляя интегралов.
33. Пусть случайная величина ξ распределена дискретно ($P(\xi = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$) или абсолютно непрерывно (задана $p(\cdot)$ – плотность вероятности ξ). Запишите в явном виде формулы, позволяющие в обоих случаях рассчитать характеристическую функцию случайной величины ξ .
34. Что такое сходимость последовательности ξ_1, ξ_2, \dots случайных величин к случайной величине ξ с вероятностью единица, по вероятности, по распределению?
35. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ одинаково распределены, независимы, $D\xi_k < \infty, M\xi_k = \mu$. Сформулируйте для этой последовательности закон больших чисел.
36. **Запишите плотность вероятности** (не название типа распределения) случайной величины ν , к которой стремится $\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ при $n \rightarrow \infty$, где случайные величины ξ_k независимы в совокупности, одинаково распределены и $M\xi_k = \mu, D\xi_k = \sigma^2$.
37. Пользуясь интегральной теоремой Муавра–Лапласа, запишите приближённое выражение для вероятности того, что при n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p число успехов не будет превосходить k .

Простейшие задачи и вероятностные модели. Цепи Маркова.

1. Последовательность подмножеств действительной прямой имеет вид $[-1/n, 1 + 1/n]$, $n = 1, 2, \dots$. Какое множество точек на действительной прямой есть $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ (запишите границы множества в явном виде)?
2. События A, B независимы и $P(A) = 0.6, P(B) = 0.6$. Найдите $P(A \setminus B)$ и $P(B \setminus A)$.
3. Случайная величина принимает три значения: заданы $P(\xi = 1) = 0.3, P(\xi = 2) = 0.3, P(\xi = 3) = 0.4$. Нарисуйте график ее функции распределения.
4. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и каждая из них принимает значения 0, 1 с равными вероятностями. Найдите $P\left(\sum_{k=1}^n \xi_k \geq 1\right)$.
5. Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение: её плотность вероятности имеет вид $p(x) = 2x$ при $0 < x < 1$. Найдите $M(1/\xi)$.
6. Случайная величина ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $1/3$. Найдите значение $M \sin \frac{\pi \xi}{2}$.
7. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы, и каждая из них имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 4$. Найдите $M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)$.
8. Длины сторон прямоугольника суть независимые случайные величины, распределённые равномерно на отрезках $[0; 1]$ и $[0; 2]$. Найдите математические ожидания площади и периметра прямоугольника.
9. Груз выбирают наугад из набора $\{m, 2m, 3m\}$ и кладут на левую чашу весов. На правой чаше весов лежит груз, масса которого есть случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[m, 5m]$. Найдите математическое ожидание показания стрелки весов (отклонение стрелки влево от нуля – отрицательное показание, а вправо – положительное).
10. Проекция скорости частицы на три пространственные оси суть независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1$. Масса частицы есть не зависящая от скорости случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[0, 1]$ (в некоторых единицах). Найдите математическое ожидание кинетической энергии частицы.
11. Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p , вероятностью неудачи q , $p + q = 1$. Чему равна вероятность того, что произошло не менее k успехов/произошло ровно k успехов, причем два первых испытания закончились успехами?

12. Найдите вероятность того, что в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $1/4$ четвертый успех случился на пятнадцатом испытании и при этом до последнего испытания на протяжении пяти испытаний успехов не было.
13. Частица начинает из нуля случайные блуждания по целочисленным точкам действительной прямой, совершая прыжок на расстояние единица вправо с вероятностью p и оставаясь на месте с вероятностью q , $p+q=1$. Найдите вероятность того, что за 5 шагов она уйдёт на расстояние $\Delta x = 3$ от начальной точки влево или вправо.
14. Случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots принимают значения из множества $X = \{x_1, \dots, x_s\}$. При каком условии эти случайные величины образуют цепь Маркова?
15. Отметьте верные утверждения:
- 1) последовательность **независимых** случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ образует цепь Маркова;
 - 2) в цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ случайные величины ξ_n и ξ_{n+m} независимы при $m \geq 2$;
 - 3) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль строки равна единице;
 - 4) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль столбца равна единице;
 - 5) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма всех её элементов равна единице.
16. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Задано начальное распределение $P(\xi_0 = 1) = 1/3$, $P(\xi_0 = 2) = 2/3$. Найдите распределение случайной величины ξ_1 .
17. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Задано начальное распределение $P(\xi_0 = 1) = 1/3$, $P(\xi_0 = 2) = 2/3$. Найдите совместное распределение случайных величин ξ_0 и ξ_1 , т. е. численные значения вероятностей $P(\xi_0 = k, \xi_1 = j)$ для всех $k, j \in \{1, 2\}$.
18. Дана конечная однородная цепь Маркова с s состояниями. Напишите общий вид матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний.
19. Пусть заданы матрицы $\pi^{(n)}$ перехода n шагов в конечной однородной цепи Маркова при $n = 2, 3$. Как найти матрицу перехода за 7 шагов?
20. Однородная цепи Маркова с состояниями x_1, \dots, x_s имеет финальные вероятности $p_k^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{jk}^{(n)}$ и такое же распределение имеет начальный шаг цепи, $P(\xi_0 = x_k) = p_k^*$ для $k = 1, \dots, s$. Чему равна $P(\xi_n = x_k)$ на заданном шаге n ?