ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2021 г.

Предварительный письменный опрос. Список вопросов.

Основы теории множеств, аксиоматические свойства вероятности и следствия из них.

1. Запишите свойства ассоциативности (правило расстановки скобок в однородном ряду операций), коммутативности (перестановочности), дистрибутивности (правило раскрытия скобок в смешанном ряду операций) и формулы двойственности для операций объединения и пересечения множеств.

2. Отметьте те утверждения для множеств (событий), которые всегда верны: (**I**) $A \subset C$, если $A \subset B$ и $B \subset C$, (**II**) $A \subset (A \cap B)$, (**III**) $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

3. Пусть A и B — два события. Запишите математическое выражение для множества тех исходов, при которых произойдет ровно одно/хотя бы одно из этих событий.

4. Можно ли утверждать, что события A и $\overline{A \cup B}$ никогда не реализуются вместе в одном случайном эксперименте?

5. Каким условиям должны удовлетворять события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы они образовали полную группу попарно несовместных событий?

6. Пусть $A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ или $A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Какое множество есть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в каждом из этих двух случаев?

7. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется алгеброй подмножеств?

8. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется **СИГМА**-алгеброй подмножеств?

9. Пусть $\mathcal{F}$ — алгебра подмножеств множества Ω. Какое дополнительное условие надо наложить на $\mathcal{F}$, для того чтобы $\mathcal{F}$ стала **СИГМА**-алгеброй?

10. Алгебра $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω определяется условиями: (**I**) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$; (**II**) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$; (**III**) если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
    Какое из условий лишнее?

11. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторая **алгебра** подмножеств множества элементарных исходов Ω. Выберите верные утверждения: (**I**) любой элементарный исход $\{\omega\} \in \mathcal{F}$; (**II**) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$; (**III**) $\Omega \in \mathcal{F}$.

12. Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств пространства Ω, если подмножества A и B пространства Ω удовлетворяют условиям $A \cup B = \Omega$ и $A \cap B = \varnothing$? Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств множества Ω, если его подмножества A и B произвольны?

13. Какое свойство вероятности называется **СИГМА**-аддитивностью?

14. Какие из перечисленных свойств вероятности являются аксиомами: (**I**): $P(A) \geqslant 0$; (**II**): $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$; (**III**): $P(A \cap B) = P(A)P(B)$?

15. Как определяется попарная независимость событий $A_1, \ldots, A_n$ и их независимость в совокупности?

16. Известно, что A и B — произвольные/имеющие ненулевую вероятность независимые события. При этом условии:
    (**I**): события $\overline{A}$ и $A \cap B$ также всегда независимы; (**II**): события A и B могут быть несовместны; (**III**): всегда верно равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
    Выберите верные утверждения.

17. Как определяется вероятность того, что произойдет событие A, при условии, что произошло событие B?

18. Запишите формулу полной вероятности.

19. Запишите формулу Байеса для $P(A_k|B)$, где A_k – одно событие из полной группы попарно несовместных событий.

20. Пусть все упомянутые ниже условные вероятности существуют. Верно ли, что всегда справедливы следующие равенства: $P\big(\overline{A} \mid B\big) = 1 - P(A|B)$; $P\big(A \mid \overline{B}\,\big) = 1 - P(A|B)$?

21. При каких условиях $\lim C_n^k p^k q^{n-k} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$?

Теория случайных величин.

1. Дайте определение того, что ξ есть случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2. Как определяется функция распределения случайной величины ξ?

3. Найдите **в явном виде** значение $F(z)$ функции распределения в каждой точке $z \in \mathbb{R}$ для случайной величины, равной числу успехов в двух независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p; для случайной величины, имеющей плотность вероятности $p(x) = 3e^{-3x}$ при $x > 0$.

4. Пусть задана $F(\,\cdot\,)$ – функция распределения случайной величины ξ. Выразите через $F(\,\cdot\,)$ вероятности $P(\xi > x)$, $P(\xi = 1)$.

5. Известно, что $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. Функция распределения случайной величины ξ при $0 < x \leqslant 1$ может иметь вид (**I**) $F(x) = x^2$, (**II**) $F(x) = 1 - x$, (**III**) $F(x) = 1 - e^{-x}$. Выберите верные утверждения.

6. Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$, любой случайной величины всегда является (**I**) непрерывной в каждой точке; (**II**) может иметь только разрывы первого рода (существуют, но не совпадают левое и правое предельные значения функции); (**III**) может иметь разрывы первого и второго рода (возможно, не существуют левое или правое предельные значения функции); (**IV**) непрерывна слева ; (**V**) непрерывна справа. Перечислите верные утверждения.

7. Какие из указанных далее функций $p(\,\cdot\,)$ могут быть плотностью вероятности на всей числовой прямой или на указанном интервале (вне указанного интервала $p(x) \equiv 0$): (**I**) $p(x) = 1/x^2$ при $x > 1$, (**II**) $p(x) = \sin x$ при $-\infty < x < \infty$, (**III**) $p(x) = 3 - 4x$ при $0 < x < 1$?

8. Задана плотность вероятности $p(x)$, $-\infty < x < +\infty$, абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Запишите формулы для расчёта $P(a < \xi < b)$, $P(\xi \leqslant a)$.

9. При каком условии случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности/независимы попарно/некоррелированы?

10. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности. Верно ли, что при этом любые m из них также независимы в совокупности (для $1 < m < n$)?

11. Как определяется совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$?

12. Пусть для всех $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ существует совместная плотность $p(x_1, x_2)$ вероятности случайных величины ξ_1, ξ_2. Выразите через неё значение совместной функции распределения $F(z_1, z_2)$ в некоторой точке (z_1, z_2).

13. Задана $F_{\xi,\eta}(x, y)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ, η. Как выражается через неё $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ?

14. Дана $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η. Как найти плотность $p_\xi(x)$ вероятности случайной величины ξ?

15. Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ, η. Как найти условную плотность $p_{\xi\,|\,\eta}(x\,|\,y)$ вероятности случайной величины ξ?

16. Заданы $P(\xi = x_k) = p_k$ для $k = 1, 2, \ldots$. Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (напишите **явные формулы**)?

17. Для всех $x \in \mathbb{R}$ задана $p(x)$ — плотность вероятности случайной величины ξ. Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (напишите **явные формулы**).

18. Известно, что все $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$ существуют. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда верно равенство $M(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = M\xi_1 + \cdots + M\xi_n$?

19. Дано, что $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$ существуют и $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_j) = 0$ при $k \neq j$. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда $M(\xi_1 \ldots \xi_n) = M\xi_1 \ldots M\xi_n$?

20. Заданы значения $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, \ldots, n$. Как рассчитать число $M(\xi^2 + 2)$?

21. Для случайной величины ξ заданы значения её плотности вероятности $p(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Запишите **явную формулу** для расчёта $M(2e^{\xi} + 2)$.

22. Как определяется коэффициент ковариации случайных величин ξ и η (достаточно записать определение, а не формулу для расчёта)?

23. Что такое коэффициент корреляции (корреляция) случайных величин ξ, η и **какие значения** он может принимать?

24. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют одинаковую дисперсию σ^2. Чему равна $D(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3)$?

25. Пусть случайная величина ξ имеет конечную дисперсию $D\xi$, тогда:
    (**I**) $D\xi < \min\limits_{a\in\mathbb{R}} M(\xi - a)^2$; (**II**) $D\xi = \min\limits_{a\in\mathbb{R}} M(\xi - a)^2$; (**III**) $D\xi > \min\limits_{a\in\mathbb{R}} M(\xi - a)^2$.
    Выберите утверждения, верные в любом случае.

26. Верно ли, что из попарной независимости/некоррелированности/совокупной независимости случайных величин вытекает равенство $D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n$ (считается, что все дисперсии существуют)?

27. Запишите неравенство Чебышёва.

28. Запишите неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

29. Задана $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Выразите через f характеристическую функцию случайной величины $a\xi + b$, где a, b – постоянные?

30. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены. Пусть $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_k. Выразите через f характеристическую функцию случайной величины $\xi_1 - \xi_2$/случайной величины $\xi_1 + \cdots + \xi_n$?

31. Запишите формулы, задающие распределение Пуассона/биномиальное распределение.

32. Запишите формулы для плотности вероятности случайной величины ξ, задающие нормальное распределение с параметрами μ, σ^2/равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

33. Пусть случайная величин ξ распределена дискретно ($P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$) или абсолютно непрерывно (задана $p(\cdot)$ – плотность вероятности ξ). Запишите **в явном виде** формулы, позволяющие в обоих случаях рассчитать характеристическую функцию случайной величины ξ.

34. Запишите **в явном виде** формулу для расчёта характеристической функции случайной величины ξ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p/равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ (окончательный компактный ответ не требуется).

35. Что такое сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин к случайной величине ξ с вероятностью единица/по вероятности/по распределению?

36. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ одинаково распределены и независимы. Известно, что $D\xi_k < \infty$, $M\xi_k = \mu$. Сформулируйте для этой последовательности закон больших чисел.

37. **Запишите плотность вероятности** (не название типа распределения) случайной величины ν, к которой стремится $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ при $n \to \infty$, где случайные величины ξ_k независимы в совокупности, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$.

38. Пользуясь интегральной теоремой Муавра–Лапласа, запишите приближённое выражение для вероятности того, что при n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p число успехов не будет превосходить k.

Простейшие задачи и вероятностные модели. Цепи Маркова.

1. Упростите выражение $\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \bar{A}$.

2. Последовательность подмножеств действительной прямой имеет вид $[-1/n, 1 + 1/n]$, $n = 1, 2, \dots$. Опишите **явно** множество точек на действительной прямой $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$?

3. Дополните множество $\mathcal{F} = \Big\{\Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\Big\}$ одним подмножеством так, чтобы $\mathcal{F}$ стало алгеброй подмножеств множества $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. События A, B независимы и $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.6$. Найдите $P(A \backslash B)$ и $P(B \backslash A)$. Найдите $P(A|A \cap B)$.

5. Случайная величина принимает три значения: заданы $P(\xi = 1) = 0.3$, $P(\xi = 2) = 0.3$, $P(\xi = 3) = 0.4$. Нарисовать график ее функции распределения.

6. Задана плотность вероятности $p(x) = 2x$ для $0 < x < 1$ случайной величины ξ. Найдите **явное** выражение для функции распределения $F(z)$ в каждой точке $z \in \mathbb{R}$?

7. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и каждая из них принимает значения 0, 1 с равными вероятностями. Найдите $P\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \geqslant 1\Big)$.

8. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найдите $M\xi$, $D\xi$, не вычисляя интегралов.

9. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и распределены нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Найдите $M(\xi_1 + 2\xi_2^2)$, не вычисляя интегралов.

10. Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение: задана $p(x) = 2x$ при $0 < x < 1$. Найдите число $M(1/\xi)$.

11. Случайная величина ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями 1/3. Найдите число $M \sin \dfrac{\pi\xi}{2}$.

12. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, и каждая из них имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 4$. Найдите число $M\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2\Big)$.

13. Случайные величины ξ_1, ξ_2, независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание $\mu = 1$ и дисперсию $\sigma^2 = 1$. Найдите значения постоянных a и b, при которых $a(\xi_1 + \xi_2 + b)$ имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

14. Длины сторон прямоугольника суть независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезках $[0; 1]$ и $[0; 2]$. Найдите математические ожидания площади и периметра прямоугольника.

15. Проекции скорости частицы на три пространственные оси суть независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1$. Масса частицы есть не зависящая от скорости случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[0, 1]$ (в некоторых единицах). Найдите математическое ожидание кинетической энергии частицы.

16. Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p, вероятностью неудачи q, $p + q = 1$. Найдите вероятность того, что произошло не менее k успехов/произошло ровно k успехов, причём два первых испытания закончились успехами? Найдите вероятность того, что в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $1/4$ четвертый успех случился

на пятнадцатом испытании и при этом до последнего испытания на протяжении пяти испытаний успехов не было.

17. Частица начинает из нуля случайные блуждания по целочисленным точкам действительной прямой, совершая прыжок на расстояние единица вправо с вероятностью p и оставаясь на месте с вероятностью q, $p+q=1$. Найдите вероятность того, что за 5 шагов она уйдёт на расстояние $x=3$ от начальной точки.

18. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \dots, x_s\}$. При каком условии эти случайные величины образуют цепь Маркова?

19. Отметьте верные утверждения:
    1) любая последовательность **независимых** случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ образует цепь Маркова;
    2) в цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ случайные величины ξ_n и ξ_{n+m} обязательно независимы при $m \geqslant 2$;
    3) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль строки равна единице;
    4) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль столбца равна единице;
    5) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма всех её элементов равна единице.

20. Дана конечная однородная цепь Маркова с s состояниями. Запишите общий вид матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний.

21. Пусть заданы матрицы $\pi^{(n)}$ перехода n шагов в конечной однородной цепи Маркова при $n = 2, 3$. Как найти матрицу перехода за 7 шагов?

22. В однородной цепи Маркова с состояниями $x_1, \dots, x_s$ начальное распределение совпадает с финальным: $P(\xi_0 = x_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{jk}^{(n)} = p_k$ для $k = 1, \dots, s$. Чему равна $P(\xi_n = x_k)$ при любом фиксированном n?