ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2019 г.

Предварительный письменный опрос. Список вопросов.

В вариантах вопросов на экзамене возможны изменения по сравнению с предложенным списком: могут быть изменены численные значения, вид событий, вероятности которых нужно вычислить, функции, задающие распределения случайных величин, и пр.

Основы теории множеств, аксиоматические свойства вероятности и следствия из них.

1. Записать свойства ассоциативности (правило расстановки скобок в однородном ряду операций), коммутативности (перестановочности), дистрибутивности (правило раскрытия скобок в смешанном ряду операций) и формулы двойственности для операций объединения и пересечения множеств.
2. Упростить выражение $\overline{(A \cup \bar{B})} \cup \bar{A}$.
3. Отметьте те утверждения для множеств (событий), которые всегда верны: (**I**) $A \subset C$, если $A \subset B$ и $B \subset C$, (**II**) $A \subset (A \cap B)$, (**III**) $A \cap \bar{A} = \varnothing$.
4. Пусть A и B — два события. Записать математическое выражение для множества тех исходов, при которых произойдет ровно одно/хотя бы одно из этих событий.
5. Пусть $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}B$, $C = \{1, 2\}$ – подмножества множества $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Записать в явном виде множества $A \cap C$ и $A \vartriangle B \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
6. Можно ли утверждать, что события A и $\overline{A \cup B}$ никогда не реализуются вместе в одном случайном эксперименте?
7. Каким условиям должны удовлетворять события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы они образовали полную группу попарно несовместных событий?
8. Пусть $A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ или $A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Какое множество есть $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в каждом из этих двух случаев?
9. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется алгеброй подмножеств?
10. Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется **СИГМА**-алгеброй подмножеств?
11. Пусть $\mathcal{F}$ — алгебра подмножеств множества Ω. Какое дополнительное условие надо наложить на $\mathcal{F}$, для того чтобы $\mathcal{F}$ стала **СИГМА**-алгеброй?

12. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторая **алгебра** подмножеств множества элементарных исходов Ω. Выберите верные утверждения: (**I**) любой элементарный исход $\{\omega\} \in \mathcal{F}$; (**II**) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$; (**III**) $\Omega \in \mathcal{F}$.

13. Дополните множество $\mathcal{F} = \Big\{\Omega, \{1,2,3\}, \{4,5\}\Big\}$ одним подмножеством так, чтобы $\mathcal{F}$ стало алгеброй подмножеств множества $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$.

14. Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств пространства Ω, если подмножества A и B пространства Ω удовлетворяют условиям $A \cup B = \Omega$ и $A \cap B = \varnothing$? Является ли множество $\mathcal{F} = \{\Omega, A, B, \varnothing\}$ алгеброй подмножеств множества Ω, если его подмножества A и B произвольны?

15. Какое свойство вероятности называется **СИГМА**-аддитивностью?

16. Какие из перечисленных свойств вероятности являются аксиомами: (**I**): $P(A) \geqslant 0$; (**II**): $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$; (**III**): $P(A \cap B) = P(A)P(B)$?

17. Пользуясь свойством конечной аддитивности, выведите из аксиом вероятности равенство $P(A) - P(B) = P(A \backslash B)$ при $A \supset B$.

18. Известно, что наступление события A влечёт наступление события B. Поставить знак неравенства между $P(A)$ и $P(B)$.

19. Как определяется попарная независимость событий $A_1, \ldots, A_n$ и их независимость в совокупности?

20. Известно, что A и B — независимые события. Можно ли утверждать, что при этом условии события $\bar{A}$ и $A \cap B$ также всегда независимы?

21. Как определяется вероятность того, что произойдет событие A, при условии, что произошло событие B?

22. Написать формулу полной вероятности.

23. Написать формулу Байеса для $P(A_k|B)$, где A_k – одно событие из полной группы попарно несовместных событий.

24. Пусть все упомянутые ниже условные вероятности существуют. Верно ли, что всегда справедливо следующие равенства: $P\big(\bar{A} \,|\, B\big) = 1 - P(A|B)$; $P\big(A \,|\, \bar{B}\,\big) = 1 - P(A|B)$?

25. При каких условиях $\lim C_n^k p^k q^{n-k} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$?

Теория случайных величин.

1. Дать определение того, что ξ есть случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2. Как определяется функция распределения случайной величины ξ?

3. Пусть задана $F(\,\cdot\,)$ – функция распределения случайной величины ξ. Выразить через $F(\,\cdot\,)$ вероятности $P(\xi > x)$, $P(\xi = 1)$.

4. Известно, что $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. Функция распределения случайной величины ξ при $0 < x \leqslant 1$ может иметь вид (**I**) $F(x) = x^2$, (**II**) $F(x) = 1 - x$, (**III**) $F(x) = 1 - e^{-x}$. Выберите верные утверждения.

5. Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$, любой случайной величины всегда является (**I**) непрерывной в каждой точке; (**II**) может иметь только разрывы первого рода (существуют, но не совпадают левое и правое предельные значения функции); (**III**) может иметь разрывы первого и второго рода (возможно, не существуют левое или правое предельные значения функции); (**IV**) непрерывна слева ; (**V**) непрерывна справа. Перечислите верные утверждения.

6. Какие из указанных далее функций $p(\,\cdot\,)$ могут быть плотностью вероятности на всей числовой прямой или на указанном интервале (вне указанного интервала $p(x) \equiv 0$): (**I**) $p(x) = 1/x^2$ при $x > 1$, (**II**) $p(x) = \sin x$ при $-\infty < x < \infty$, (**III**) $p(x) = 3 - 4x$ при $0 < x < 1$.

7. Пусть в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$ задана плотность вероятности $p(x)$ случайной величины ξ. Как найти значение функции распределения $F(x)$ в каждой точке x?

8. Задана плотность вероятности $p(x)$, $-\infty < x < +\infty$, абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Написать явные формулы для расчёта $P(a < \xi < b)$, $P(\xi \leqslant a)$.

9. При каком условии случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы попарно; некоррелированы?

10. Как определяется совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$?

11. Пусть для всех $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ существует совместная плотность $p(x_1, x_2)$ вероятности случайных величины ξ_1, ξ_2. Написать явную формулу, позволяющую найти значение совместной функции распределения $F(x_1, x_2)$.

12. Задана $F_{\xi,\eta,\zeta}(x, y, z)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ, η, ζ. Как выражается через неё $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ?

13. Пусть $p_{\xi,\eta}(x,y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ,η. Как найти плотность $p_\xi(x)$ вероятности случайной величины ξ?

14. Пусть $p_{\xi,\eta}(x,y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин ξ,η. Как найти условную плотность $p_{\xi\,|\,\eta}(x\,|\,y)$ вероятности случайной величины ξ?

15. Заданы $P(\xi = x_k) = p_k$ для $k = 1, 2, \dots$. Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (написать явные формулы) и при каком условии моменты считаются существующими?

16. Для всех $x \in \mathbb{R}$ задана $p(x)$ — плотность вероятности случайной величины ξ. Как найти $M\xi$, $M\xi^2$ и $D\xi$ (написать явные формулы) и при каком условии моменты считаются существующими?

17. Известно, что все $M\xi_1, \dots, M\xi_n$ существуют. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда верно равенство $M(\xi_1 + \dots + \xi_n) = M\xi_1 + \dots + M\xi_n$?

18. Дано, что $M\xi_1, \dots, M\xi_n$ существуют и некоррелированы, $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_j) = 0$ при $k \neq j$. Можно ли утверждать, что при этом условии всегда $M(\xi_1 \dots \xi_n) = M\xi_1 \dots M\xi_n$?

19. Заданы значения $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, \dots, n$. Как рассчитать число $M(\xi^2 + 2)$?

20. Для случайной величины ξ заданы значения её плотности вероятности $p(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Как рассчитать число $M(2e^\xi + 2)$?

21. Как определяется коэффициент ковариации случайных величин ξ и η (достаточно записать определение, а не формулу для расчёта)?

22. Что такое коэффициент **корреляции** случайных величин ξ,η и **какие значения** он может принимать?

23. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют одинаковую дисперсию σ^2. Чему равна $D(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3)$?

24. Верно ли, что из попарной независимости, некоррелированности, совокупной независимости случайных величин вытекает равенство $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$ (считается, что все дисперсии существуют)?

25. Записать неравенство Чебышёва.

26. Записать неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

27. Задана $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Выразить через f характеристическую функцию случайной величины $a\xi + b$, где a, b – постоянные?

28. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены. Пусть $f(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_k. Выразить через f характеристическую функцию случайной величины случайной величины $\xi_1 + \dots + \xi_n$?

29. Записать формулы, задающие распределение Пуассона/биномиальное распределение.

30. Записать формулы для плотности вероятности случайной величины ξ, задающие нормальное распределение с параметрами μ, σ^2 и равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

31. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найти $M\xi$, $D\xi$, не вычисляя интегралов.

32. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и распределены нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Найти $M(\xi_1 + 2\xi_2^2)$, не вычисляя интегралов.

33. Пусть случайная величин ξ распределена дискретно ($P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$) или абсолютно непрерывно (задана $p(\cdot)$ – плотность вероятности ξ). Записать в явном виде формулы, позволяющие в обоих случаях рассчитать характеристическую функцию случайной величины ξ.

34. Что такое сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин к случайной величине ξ с вероятностью единица, по вероятности, по распределению?

35. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ одинаково распределены, независимы, $D\xi_k < \infty$, $M\xi_k = \mu$. Сформулировать для этой последовательности закон больших чисел.

36. **Записать плотность вероятности** (не название типа распределения) случайной величины ν, к которой стремится $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ при $n \to \infty$, где случайные величины ξ_k независимы в совокупности, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$.

37. Пользуясь интегральной теоремой Муавра–Лапласа, записать приближённое выражение для вероятности того, что при n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p число успехов не будет превосходить k.

Простейшие задачи и вероятностные модели. Цепи Маркова.

1. Последовательность подмножеств действительной прямой имеет вид $[-1/n, 1 + 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Какое **множество точек на действительной прямой** есть $A = \lim_{n\to\infty} A_n$?
2. События A, B независимы и $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.6$. Найти $P(A \setminus B)$ и $P(B \setminus A)$.
3. Случайная величина принимает три значения: заданы $P(\xi = 1) = 0.3$, $P(\xi = 2) = 0.3$, $P(\xi = 3) = 0.4$. Нарисовать график ее функции распределения.
4. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая из них принимает значения 0, 1 с равными вероятностями. Найти $P\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \geqslant 1\Big)$.
5. Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение: задана $p(x) = 2x$ при $0 < x < 1$. Найти $M(1/\xi)$.
6. Случайная величина ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями 1/3. Найти значение $M \sin \dfrac{\pi\xi}{2}$.
7. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, и каждая из них имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 4$. Найти $M\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2\Big)$.
8. Длины сторон прямоугольника суть независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезках $[0; 1]$ и $[0; 2]$. Найти математические ожидания площади и периметра прямоугольника.
9. Груз выбирают наугад из набора $\{m, 2m, 3m\}$ и кладут на левую чашу весов. На правой чаше весов лежит груз, масса которого есть случайная величина, распределённая равномерно на $[m, 5m]$. Найти математическое ожидание показания стрелки весов (отклонение стрелки влево от нуля – отрицательное показание, а вправо – положительное).
10. Проекции скорости частицы на три пространственные оси суть независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1$. Масса частицы есть не зависящая от скорости случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[0, 1]$ (в некоторых единицах). Найти математическое ожидание кинетической энергии частицы.
11. Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p, вероятностью неудачи q, $p + q = 1$. Чему равна вероятность того, что произошло не менее k успехов/произошло ровно k успехов, причем два первых испытания закончились успехами?
12. Найти вероятность того, что в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха 1/4 четвертый успех случился на пятнадцатом испытании и при этом до последнего испытания на протяжении пяти испытаний успехов не было.

13. Частица начинает из нуля случайные блуждания по целочисленным точкам действительной прямой, совершая прыжок на расстояние единица вправо с вероятностью p и оставаясь на месте с вероятностью q, $p+q=1$. Найти вероятность того, что за 5 шагов она уйдёт на расстояние $x=3$ от начальной точки влево или вправо.

14. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$. При каком условии эти случайные величины образуют цепь Маркова?

15. Отметьте верные утверждения:

    1) последовательность **независимых** случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ образует цепь Маркова;

    2) в цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ случайные величины ξ_n и ξ_{n+m} независимы при $m \geqslant 2$;

    3) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль строки равна единице;

    4) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль столбца равна единице;

    5) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма всех её элементов равна единице.

16. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, матрица перехода имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Задано начальное распределение $P(\xi_0 = 1) = 1/3$, $P(\xi_0 = 2) = 2/3$. Найти распределение случайной величины ξ_1.

17. Пусть $\xi_0, \xi_2, \ldots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, матрица перехода имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Задано начальное распределение $P(\xi_0 = 1) = 1/3$, $P(\xi_0 = 2) = 2/3$. Найти совместное распределение случайных величин ξ_0 и ξ_1, т. е. вероятности $P(\xi_0 = k, \xi_1 = j)$ для всех $k, j \in \{1, 2\}$.

18. Дана конечная однородная цепь Маркова с s состояниями. Написать общий вид матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний.

19. Пусть заданы матрицы $\pi^{(n)}$ перехода n шагов в конечной однородной цепи Маркова при $n = 2, 3$. Как найти матрицу перехода за 7 шагов?

20. Однородная цепи Маркова с состояниями $x_i, \ldots, x_s$ имеет финальные вероятности $p_k = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{jk}^{(n)}$ и такое же распределение имеет начальный шаг цепи, $P(\xi_0 = x_i) = p_i$ для $i = 1, \ldots, s$. Чему равна $P(\xi_n = x_j)$?