# Письменная часть экзамена по курсу «Математическая статистика и основы теории случайных процессов». Осенний семестр 2024-2025 учебного года.

Вариант задания содержит 7 вопросов из разных разделов курса. Для получения зачёта необходимо дать правильные ответы на 5 вопросов.

Во всех заданиях про случайные блуждания рассматриваются случайные блуждания по целочисленным точкам действительной прямой, при которых частица совершает прыжки на расстояние единица вправо с вероятностью $p$ и влево с вероятностью $q$, $p+q=1$.

Во всех заданиях по математической статистике выборка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет объём $n$ и состоит из независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией. Все необходимые моменты распределений считаются существующими. В задачах оценивания параметров $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – выборка из распределения, зависящего от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, где $\Theta$ – априори известное множество.

В конкретных вариантах задания могут быть изменены численные параметры, вид распределения, конкретный вид зависимости от выборки, знаки неравенств и т. д. без изменения сути вопроса.

## Список вопросов

1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, задан как $\xi(t) = \nu t^2$, где $\nu$ – случайная величина, распределённая нормально с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$/равномерно на интервале $(-1, 1)$. Нарисуйте две различные возможные траектории этого процесса на одном графике.

2. Пусть случайный процесс $\xi(t), t \geqslant 0$, имеет двумерную плотность вероятности $p^{(2)}(x, t; z, s)$ при всех значениях аргументов. Запишите **явную формулу** для расчёта вероятности $P(\xi(t) + \xi(s) < 1)$.

3. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda$. Отметьте верные утверждения:

   а) его траектории суть кусочно-постоянные функции с интервалами постоянства фиксированной длины и случайными величинами скачков в точках разрыва;

   б) его траектории суть кусочно-постоянные функции с интервалами постоянства случайной длины и фиксированными величинами скачков в точках разрыва;

   в) его траектории суть кусочно-линейные непрерывные функции со случайным угол наклона.

4. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda$. Отметьте верные утверждения:

   а) это процесс с независимыми приращениями;

   б) любые два его сечения независимы;

   в) $D\xi(t)$ линейно возрастает по переменной $t$;

   г) $D\xi(t)$ квадратично возрастает по переменной $t$

5. Частица начинает из нуля случайные блуждания, прыгая вправо с вероятностью $p$ и влево с вероятностью $q$, $p+q=1$. Найдите вероятность того, что за 6 шагов она вернётся в начальную точку.

6. Частица начинает из точки $x=1$ случайные блуждания, прыгая вправо с вероятностью $p$ и влево с вероятностью $q$, $p+q=1$. Найдите вероятность того, что за 8 шагов она вернётся в начальную точку и всё время блужданий будет находиться строго правее нуля.

7. Пусть $w(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Винера с параметром $\sigma^2 = 1$, начинающийся в нуле. Запишите совместную плотность вероятности случайных величин $w(t)$ и $w(2t) - w(t)$.

8. Траектории процесса Винера:

   а) монотонно возрастают с вероятностью единица;

   б) испытывают единичные скачки в случайные моменты времени;

   в) симметрично распределены относительно уровня $x = 0$, т. е. $P(w(t)>0) = P(w(t)<0)$.

   Отметьте верные утверждения.

9. Покажите, что для процесса Винера $w(t)$, $t \geqslant 0$, имеет место среднеквадратичная сходимость $M\big(w(t+h) - w(t)\big)^2 \to 0$ при $h \to +0$ для любого фиксированного $t > 0$.

10. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$. При каком условии эти случайные величины образуют цепь Маркова?

11. Отметьте верные утверждения:
   1) последовательность **независимых** случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ образует цепь Маркова;
   2) в цепи Маркова $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ случайные величины $\xi_n$ и $\xi_{n+m}$ при $m \geqslant 2$ **всегда** независимы;
   3) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль строки равна единице;
   4) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма её элементов вдоль столбца равна единице;
   5) в матрице перехода за один шаг для цепи Маркова сумма всех её элементов равна единице;
   6) у любой цепи Маркова существуют финальные вероятности;
   7) если существуют финальные вероятности, то существует стационарное (т. е. не меняющееся от шага к шагу) распределение.

12. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, матрица перехода имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Задано начальное распределение $P(\xi_0 = 1) = 1/3$, $P(\xi_0 = 2) = 2/3$. Найдите распределение случайной величины $\xi_1$.

13. Дана конечная однородная цепь Маркова с $s$ состояниями. Напишите общий вид матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний.

14. Однородная цепь Маркова с состояниями $x_i, \ldots, x_s$ имеет финальное распределение $p_k^* = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{jk}^{(n)}$ для $k = 1, \ldots, s$, которое совпадает с начальным: $P(\xi_0 = x_k) = p_k^*$ для $k = 1, \ldots, s$. Чему равна $P(\xi_n = x_k)$ на заданном шаге $n$?

15. Заданы матрица переходных вероятностей $\pi(\,\cdot\,)$ для марковского процесса с состояниями $x_1, \ldots, x_s$ и начальное распределение $P(\xi(0) = x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots s$. Как найти совместное распределение двух сечений $\xi(t)$ и $\xi(u)$ процесса при $0 < u < t$?

16. Марковский процесс имеет два возможных состояния и матрицу переходных вероятностей $\pi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-4t} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4t} \end{pmatrix}$. Запишите в явном виде матрицу $\Lambda$ системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

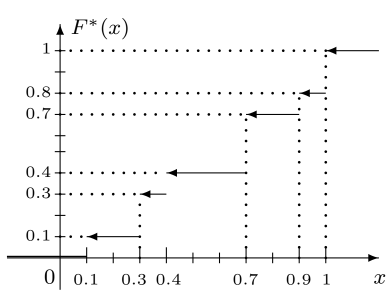
17. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – выборка объема $n$ из распределения $F_\theta(x)$, $x \in \mathbb{R}$ с неизвестным параметром $\theta \in \Theta$. Какие из перечисленных ниже функций можно назвать статистиками? Отметьте или перечислите пункты задания, для которых это верно.

а) $t(\xi) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$, б) $t(\xi) = |\bar{\xi} - \theta|$, в) $t(\xi) = \prod\limits_{k:\ \xi_k \neq 0} \xi_k$.

18. Для выборочной реализации $2, 3, 6, 3, 2, 5, 3, 4, 5, 1$ найдите числовое значение четвёртой порядковой статистики.

19. По выборке $\xi$ заданного объёма построен вариационный ряд и рассчитаны выборочное среднее $\bar{\xi}$ само́й выборки и выборочное среднее $\bar{\xi}_{(*)}$ вариационного ряда. Верно ли, что $\bar{\xi} = \bar{\xi}_{(*)}$ с вероятностью единица?

20. Выборочная функция распределения рассчитана по выборке объёма $n = 10$ и представлена на графике. Восстановите вариационный ряд выборки.



21. Каждый элемент выборки $\xi$ объёма $n$ имеет функцию распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Какой вид имеет функция распределения максимальной/минимальной порядковой статистики?

22. Максимальная порядковая статистика $\xi_{(n)}$ выборки $\xi$ объёма $n$ имеет функцию распределения $F^*(x) = x^{2n}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Какой вид имеет функция распределения одного элемента выборки?

23. Каждый элемент выборки $\xi$ объёма $n$ распределён равномерно на $[0, 1]$ (нормально с параметрами $\mu$, $\sigma^2$, экспоненциально с параметром $A$). Какой вид имеет функция правдоподобия этой выборки?

24. Пусть $\xi$ – выборка из распределения, зависящего от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$. Какая статистика $t(\xi)$ называется несмещённой оценкой значения $\tau(\theta)$, где $\tau(\,\cdot\,)$ – заданная функция на множестве $\Theta$?

25. По выборке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ из распределения $\mathbf{N}(\theta, \theta^2)$ построена статистика $\bar{\xi}$. Является ли эта статистика несмещённой и состоятельной оценкой параметра $\theta \in \mathbb{R}$? Дайте ответ по отдельности по каждому из двух свойств.

26. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – выборка из распределения, зависящего от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$. Какая статистика $t(\xi)$ называется состоятельной оценкой значения $\tau(\theta)$, где $\tau(\,\cdot\,)$ – заданная функция на множестве $\Theta$?

27. Дана выборка $\xi$ из распределения, зависящего от параметра $\theta \in \mathbb{R}$. Пусть множество реализаций выборки конечно и не зависит от $\theta$. Верно ли, что тогда эффективная оценка параметра $\theta$ является несмещённой оценкой минимальной дисперсии?

28. Пусть $L(x, \theta)$ – значение функции правдоподобия выборки $\xi$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Исправьте ошибки в следующих формулах, записав вместо них верное неравенство Крамера–Рао для несмещённой точечной оценки $t(\xi)$ значения $\tau(\theta)$:

$$D_\theta t(\xi) \leqslant \frac{[\tau'(\theta)]^2}{M_\theta\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2}, \qquad D_\theta t(\xi) \geqslant \frac{\tau'(\theta)}{M_\theta \frac{\partial \ln L(\xi,\theta)}{\partial \theta}}.$$

29. Дана выборка $\xi$ объёма $n = 1$ из распределения, зависящего от параметра $\theta \in \mathbb{R}$. Пусть множество реализаций выборки конечно и не зависит от $\theta$. Покажите, что тогда

$$M_\theta \frac{\partial \ln L(\xi, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{для всех} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

30. Пусть $\xi$ – выборка объёма $n = 1$ из дискретного распределения, зависящего от неизвестного параметра $\theta$. Покажите, что $T(\xi) = \xi$ является достаточной статистикой для $\theta$.

31. Пусть $\xi$ – выборка объёма $n$ из дискретного распределения, зависящего от неизвестного параметра $\theta$. Является ли вариационный ряд $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)}$ $n$-мерной достаточной статистикой для $\theta$?

32. Известно, что $t(\xi)$ – несмещёная оценка значения $\theta$. Можно ли утверждать, что тогда $at(\xi) + b$ – несмещённая оценка для $\tau(\theta) = a\theta + b$ (здесь $a$ и $b$ – постоянные числа)? Можно ли утверждать, что тогда $t^2(\xi)$ – несмещённая оценка для $\tau(\theta) = \theta^2$?

33. Отметьте те из следующих статистик, которые являются несмещёнными оценками математического ожидания элемента выборки $\xi$:

   а) $t(\xi) = 2\xi_1 - \xi_2$, б) $\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, в) $t(\xi) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2}$ ?

   Какие из статистик являются состоятельными оценками математического ожидания?

34. Эффективная оценка параметра $\theta$ всегда является: несмещённой, состоятельной оценкой, достаточной статистикой для параметра $\theta$. Выберите верные свойства.

35. Может ли эффективная оценка значения $\tau(\theta)$ не иметь математического ожидания, конечной дисперсии?

36. Как выглядит оценка, построенная методом моментов по выборке $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ для параметра $\theta_1 = M\xi_k$ (для $\theta_2 = M\xi_k^2$ или $\theta_3 = D\xi_k$), $k = 1, \ldots, n$. Является ли эта оценка несмещённой?

37. Дана выборка объёма $n$ из нормального распределения с неизвестной/единичной дисперсией. Отметьте, какой случайной величиной нужно воспользоваться, чтобы построить в этом случае интервальную оценку математического ожидания:

   а) имеющей распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы,

   а) имеющей распределение Пирсона (хи-квадрат) с $n$ степенями свободы,

   в) имеющей нормальное распределение,

   г) имеющей распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы.

38. По выборке объёма $n$ из нормального распределения построена стандартная интервальная оценка математического ожидания с уровнем доверия $\gamma$. Как изменяется длина этой оценки, если возрастает объём выборки; если возрастает уровень доверия? Отметьте верный ответ:

   а) не изменяется с вероятностью единица;

   б) убывает с вероятностью единица;

   в) возрастает с вероятностью единица;

   г) ответ зависит от реализации выборки.

39. Проверяется гипотеза $\xi \sim p_0(\,\cdot\,)$ против альтернативы $\xi \sim p_1(\,\cdot\,)$, где $p_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – фиксированные плотности вероятности одномерной выборки, $k = 0, 1$. Критерий задан своей критической функцией $\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Запишите через эти данные явные формулы для ошибки первого рода и мощности этого критерия.

40. Дана выборка объёма $n = 1$. Проверяется гипотеза $\xi \sim p_0(\,\cdot\,)$ против альтернативы $\xi \sim p_1(\,\cdot\,)$, где $p_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – заданные плотности вероятности, $k = 0, 1$. Какой вид имеет критическое множество нерандомизированного наиболее мощного критерия проверки такой гипотезы?

41. По одномерной выборке $\xi$ проверяется гипотеза $\xi \sim \mathbf{U}(-1, 1)$ против альтернативы $\xi \sim \mathbf{U}(0, 2)$. Критерий отклоняет гипотезу, всякий раз, когда $\xi > 0.8$. Чему равны ошибка первого рода и мощность такого критерия?

42. Дана выборка объёма $n = 1$. Проверяется простая гипотеза. Даны два критических множества $Z_1 = \{x > C_1\}$ и $Z_1 = \{x > C_2\}$ двух критериев её проверки с ошибками первого рода $\alpha_1$ и $\alpha_2 < \alpha_1$ соответственно. Сравните по величине числа $C_1$ и $C_2$.

43. Проверяется гипотеза о том, что элемент выборки имеет заданную функцию распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть $\widehat{F}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, есть выборочная функция распределения. Запишите для такой задачи критерий Колмогорова (задайте критическую функцию или критическое множество).

44. Пусть $P(\xi_k = 0) = p$, $P(\xi_k = 1) = q$, $p + q = 1$ для $k = 1, \ldots, n$. Гипотеза заключается в том, что $p = q = 1/2$. Пусть $n_j$ – количество элементов выборки $\xi, \ldots, \xi_n$, равных $j$, где $j = 1, 2$, $n_0 + n_1 = n$. Запишите статистику критерия Пирсона (хи-квадрат) для такой гипотезы; сколько степеней свободы у её асимптотического распределения?