1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Определение 1.1. *Случайным процессом* называется семейство случайных величин $\{\xi(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, где $\mathbb{T}$ – **бесконечное** множество параметров произвольной природы (например, чисел или многомерноых векторов), такое что для любого $n = 1, 2, \dots$ и для любых $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ существует совместное распределение св. $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$, т. е. для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ существует

$$P(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n) \stackrel{\text{def}}{=\!=} F(x_1, t_1; \dots' x_n, t_n) \equiv F^{(n)}(x, t). \tag{1.1}$$

Функция $F^{(n)}(\,\cdot\,)\colon (\mathbb{R}\times\mathbb{T})^n \mapsto [0, 1]$ называется *n-мерной функцией распределения случайного процесса* $\xi(t)$.

По сути n-мерная функция распределения случайного процесса – это совместная функция распределения n случайных величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$, однако она рассматривается как функция $2n$ аргументов:

• n аргументов $x_1, \dots, x_n$, каждый из которых произвольно меняется на действительной прямой (эти аргументы по своему смыслу – обычные аргумены совместной функции распределения n случайных величин);

• n аргументов $t_1, \dots, t_n$, каждый из которых выбирается произвольно в множестве $\mathbb{T}$ с точки зрения совместной функции распределения n случайных величин они выступают как параметры.

На практике чрезвычайно редко используются распределения при $n > 2$, т. е. рассматриваются исключительно одно- и двумерные функции распределения.

Непосредственно из определения (1.1) следует, что n-мерная функция распределения должна удовлетворять следующему условию: если $\{k_1, \dots, k_n\}$ – произвольная перестановка индексов $\{1, \dots, n\}$, то

$$F(x_{k_1}, t_{k_1}; \dots; x_{k_n}, t_{k_n}) \equiv F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n); \tag{1.2}$$

например, $F(x_1, t_1; x_2, t_2) = F(x_2, t_2; x_1, t_1)$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

Из свойств совместной функции распределения случайных величин вытекают следующие свойства n-мерной функций распределения случайного процесса. Выберем произвольным образом все аргументы x_k, кроме одного, например x_n (как вытекает из предыдущего свойства, номер выделенного аргумента несуществен), и зафиксируем их. Также выберем произвольно и зафиксируем $t_1, \dots t_n \in \mathbb{T}^n$. Тогда n-мерная функцию распределения $F^{(n)}(\,\cdot\,)$ как функция одной переменной $x_n \in \mathbb{R}$ непрерывна слева в каждой точке $x_n = a$,

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)\big|_{x_n\to a-0} = F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, a, t_n); \tag{1.3}$$

не убывает,

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) \leqslant F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, \tilde{x}_n, t_n), \quad x_n \leqslant \tilde{x}_n; \tag{1.4}$$

удовлетворяет двум предельным свойствам (во втором, разумеется, $n > 1$)

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)\big|_{x_n\to-\infty} = 0, \tag{1.5}$$

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)\big|_{x_n\to+\infty} = F^{(n-1)}(x_1, t_1; \dots, x_{n-1}, t_{n-1}), \tag{1.6}$$

где $F^{(n-1)}(\,\cdot\,)$ – $(n-1)$-мерная функция распределения случайного процесса. Напомним, что свойства (1.3)–(1.6) верны при любых фиксированных $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ и $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$. Если же мы «отпустим» все x-переменные и устремим их к $+\infty$, то

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, x_n, t_n)\Big|_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to +\infty}} = 1, \qquad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}. \tag{1.7}$$

Оказывается, что свойства (1.3)–(1.7) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функции $F^{(n)}(\,\cdot\,)\colon (\mathbb{R} \otimes \mathbb{T})^n \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, были конечномерными функциями распределения некоторого случайного процесса (теорема Колмогорова).

Далее для простоты будем считать, что все случайные величины $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$ заданы на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, тогда существование вероятности (1.1) вытекает из свойств алгебры $\mathcal{F}$. Таким образом, $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{T}$.

Введем некоторые термины.

Определение 1.2. Пусть значение параметра $t \in \mathbb{T}$ фиксировано. С.в. $\xi_t(\omega) = \xi(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, называется *сечением случайного процесса в точке* t. Пусть элементарный исход $\omega \in \Omega$ фиксирован. Тогда числовая функция $\xi_\omega(t)$, $t \in \mathbb{T}$, называется *траекторией* (говорят также *реализация*, или *выборочная функция*) случайного процесса.

Обратим внимание на то, что пока мы обозначили фиксированные аргументы $t \in \mathbb{T}$ или $\omega \in \Omega$ нижними индексами, чтобы отличать соответственно случайные величины или неслучайные числовые функции от случайного процесса. Но далее будем придерживаться следующего соглашения. Символом $\xi(t)$ будем обозначать и сечение (т. е. одну случайную величину), и сам случайный процесс, но для случайных процессов будем указывать, что t не фиксировано, а пробегает некое множество, т. е. писать $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$.

Как правило, полагают, что $\mathbb{T} = \{t \geqslant 0\}$, и в этом случае параметру t можно придать смысл времени. Однако природа множества $\mathbb{T}$ может быть и другой. Для многих физических моделей характерно, что множество $\mathbb{T}$ лежит не на числовой прямой, а в многомерном пространстве, например в обычном трёхмерном пространстве, Определение 1.1 в этом случае остаётся без изменений, а случайный процесс $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, как правило, называют *случайным полем*, или *случайной функцией*. Поскольку математические основы теории случайных процессов практически не зависят от того, какова размерность множества $\mathbb{T}$, далее мы будем считать, что параметр t – действительное число, более того, выбирать в качестве множества $\mathbb{T}$ счётное множество $\{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, или множество $\mathbb{R}_+ = \{t \geqslant 0\}$, или конечный интервал $[0, T]$, $0 < T < \infty$. Если множество $\mathbb{T}$ счётно, $\mathbb{T} = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, или *случайной последовательностью*.

Другим направлением обобщений определения 1.1 является изменение размерности пространства значений функции $\xi(\,\cdot\,, t)$, заданной на множестве элементарных исходов Ω: мы можем полагать, что $\xi(\omega, t)$ – точка не на числовой прямой, а в многомерном пространстве. Особенно часто рассматриваются случайные процессы со значениями на комплексной плоскости. В этом случае

$$\xi(t) = \xi^{\mathrm{Re}}(t) + i\xi^{\mathrm{Im}}(t) = \rho(t) e^{i\varphi(t)}, \tag{1.8}$$

где $\xi^{\mathrm{Re}}(t)$, $\xi^{\mathrm{Im}}(t)$, $\rho(t)$, $\varphi(t)$ для каждого фиксированного $t \in \mathbb{T}$ суть случайные величины, заданные на Ω, в их стандартном понимании. Далее мы в основном будем рассматривать действительные случайные процессы. Но ввиду особой важности в физике комплекснозначных (обычно для краткости говорят просто «комплексных») случайных процессов их мы также рассмотрим, особо оговариваемая, что рассматриваются случайные процессы с комплексными значениями.

Пример 1.1. Пусть случайный процесс задан формулами (ниже α – случайная величина)

$$\xi(t) = t^{\alpha}, \qquad P(\alpha = 1) = P(\alpha = -1) = \frac{1}{2}, \qquad t > 0.$$

Определим, как выглядят сечения и траектории данного случайного процесса.

Решение. Фиксируем $t > 0$, получаем дискретную случайную величину $\xi(t)$, равновероятно принимающую два значения:

$$P(\xi(t) = t) = P(\xi(t) = t^{-1}) = \frac{1}{2}.$$

Различные сечения случайного процесса суть случайные величины, имеющие распределения, сосредоточенные в двух точках, эти точки зависят от того, какое значение $t > 0$ фиксировано. Заметим, что при $t = 1$ данная случайная величина принимает значение 1 с вероятностью единица, т. е. не является случайной.

Теперь фиксируем элементарный исход ω, другими словами, фиксируем значение случайной величины $\alpha = \alpha(\omega)$. Если элементарный исход ω таков, что $\alpha(\omega) = 1$, то $\xi_\omega(t) = t$, и траектория случайного процесса представляет собой прямую линию. Если же $\alpha(\omega) = -1$, то $\xi_\omega(t) = 1/t$, и траектория случайного процесса – гипербола (оба варианта траектории заданы при $t > 0$).

Отметим также, что данный процесс по сути не является случайным: если в какой-либо момент времени мы находились на траектории, скажем, $\xi(t) = t$, то можно с достоверностью утверждать, что во все последующие и предыдущие моменты времени мы этой траектории не покинем. Случайным является только выбор траектории в начальный момент времени.

Определение 1.3. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – действительный случайный процесс. Если приращение n-мерной функции распределения $F_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$ по переменной x при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{T}^n$ имеет вид

$$dF_\xi^{(n)}(x,t) = F_\xi^{(n)}(x + dx, t) - F_\xi^{(n)}(x,t) = p_\xi^{(n)}(x,t)\,dx, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}^n, \quad (1.9)$$

то говорят, что случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, имеет *n-мерную плотность вероятности* $p_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$. Здесь $dx = dx_1 \ldots dx_n$.

Всюду далее под дифференциалом функции распределения мы подразумеваем приращение по x.

Пример 1.2. Пусть случайная величина ν имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, а случайный процесс задан как $\xi(t) = t + \nu$, $t > 0$. Найдем функции распределения и плотность вероятности данного случайного процесса.

Решение. Имеем для $n = 1$

$$F(x,t) = P(\xi(t) < x) = P(t + \nu < x) = P(\nu < x - t) = F_\nu(x - t),$$

где $F_\nu(\,\cdot\,)$ – функция распределения случайной величины ν, имеющей нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$,

$$F_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du, \qquad -\infty < z < +\infty.$$

Поскольку случайная величина ν имеет плотность распределения $p_\nu(\,\cdot\,)$, мы можем записать

$$dF(x,t) = F_\nu((x + dx) - t) - F_\nu(x - t) = p_\nu(x - t)\, dx,$$
$$p_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < +\infty.$$

Мы получили, что наш случайный процесс имеет одномерную плотность распределения: $p(x,t) = p_\nu(x - t)$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

Для $n = 2$ имеем аналогично

$$F(x,t) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2) = P(\nu < x_1 - t_1, \nu < x_2 - t_2).$$

Понятно, что система неравенств $\nu < x_1 - t_1$ и $\nu < x_2 - t_2$ эквивалента неравенству $\nu < x_1 - t_1$, если $x_1 - t_1 < x_2 - t_2$, и неравенству $\nu < x_2 - t_2$, если $x_2 - t_2 < x_1 - t_1$. Другими словами,

$$F(x,t) = P(\nu < x_* - t_*), \qquad x_* - t_* = \min(x_1 - t_1, x_2 - t_2). \tag{1.10}$$

Аналогично, формула

$$F(x,t) = F_\nu(x_* - t_*), \qquad x_* - t_* = \min(x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n),$$

очевидно, задаёт n-мерную функцию распределения нашего случайного процесса.

Вернёмся к $n = 2$ и попробуем найти двумерную плотность распределения:

$$\begin{aligned}
dF(x,t) = P(x_1 \leqslant \xi(t_1) < x_1 + dx_1, x_2 \leqslant \xi(t_2) < x_2 + dx_2) = \\
= P(x_1 - t_1 \leqslant \nu < x_1 + dx_1 - t_1, x +_2 -t_2 \leqslant \nu < x_2 + dx_2 - t_2) = \\
= P\big(\nu \in [z_1, z_1 + dx_1) \cap [z_2, z_2 + dx_1)\big), \qquad z_1 = x_1 - t_1, \quad z_2 = x_2 - t_2.
\end{aligned}$$

Поскольку dx_1 и dx_2 бесконечно малы, интервалы $[z_1, z_1 + dx_1)$ и $[z_2, z_2 + dx_2)$ имеют непустое пересечение, если и только если $z_1 = z_2$. В самом деле, если, скажем, мы имеем $z_1 < z_2$, то, выбирая достаточно малое dx_1, получим $z_1 + dx_1 < z_2$, при этом интервалы пересекаться не будут. Если же $z_1 = z_2 = z$, то рассматриваемое пересечение равно $[z, z + dz)$, где через dz мы обозначили (бесконечно малое) приращение $\min(dx_1, dx_2)$. Отсюда

$$dF(x,t) = P(z \leqslant \nu < z + dx) = p_\nu(z)\, dz, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

где

$$p_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad z = x_1 - t_1 = x_2 - t_2, \qquad dz = \min(dx_1, dx_2).$$

Таким образом, приращение $dF(x,t)$ как функция, заданная в четырёхмерном пространстве (функция от двух двумерных переменных $x=(x_1,x_2)$ и $t=(t_1,t_2)$) отлично от нуля только на трёхмерной гиперплоскости, на которой $x_1-t_1=x_2-t_2$. При этом $dF(x,t)$ имеет (первый) порядок малости $dz=\min(dx_1,dx_2)$ и не пропорционально $dx_1\,dx_2$, как это предписано формулой (1.9). Таким образом, двумерная плотность распределения нашего случайного процесса не существует. Тем более не существуют и плотности распределения более высоких размерностей. Очевидно, что при $n>2$ приращение $dF(x,t)$ отлично от нуля только на гиперплоскости размерности $2n-(n-1)=n+1$:

$$dF(x,t)=P(z\leqslant\nu<z+dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}\,dz,\qquad z=x_1-t_1=\cdots=x_n-t_n,$$

и $dz=\min(dx_1,\ldots,dx_n)$.

Моментные функции случайного процесса.

Определение 1.4. Если при каждом $t\in\mathbb{T}$ существует математическое ожидание случайной величины $\xi(t)$, то функция $m(\,\cdot\,)\colon\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$, заданная равенством

$$m(t)=M\xi(t),\qquad t\in\mathbb{T},\tag{1.11}$$

называется *математическим ожиданием случайного процесса* $\xi(t)$.

Используя определение математического ожидания, запишем явную формулу

$$M\xi(t)=\int_{\mathbb{R}}x\,dF(x,t),\quad\text{если верно, что}\quad\int_{\mathbb{R}}|x|\,dF(x,t)<\infty,\qquad t\in\mathbb{T}.\tag{1.12}$$

Здесь $F(\,\cdot\,)$ – одномерная функция распределения случайного процесса, а интеграл понимается в смысле Лебега–Стилтьеса. Условие абсолютной сходимости интеграла во второй части (1.12) есть условие существования математического ожидания.

Определение 1.5. Если при каждых $t,s\in\mathbb{T}$ существуют математические ожидания $M\xi(t)$, $M\xi(s)$ и $M\xi(t)\xi(s)$, то функция $R\colon\mathbb{T}\otimes\mathbb{T}\mapsto\mathbb{C}$, заданная равенством

$$R(t,s)=M\big(\xi(t)-M\xi(t)\big)\big(\xi(s)-M\xi(s)\big),\qquad t,s\in\mathbb{T}.\tag{1.13}$$

называется *ковариационной функцией случайного процесса* $\xi(t)$.

Выражение в правой части равенства (1.13) есть не что иное, как коэффициент ковариации $\operatorname{cov}(\xi(t),\xi(s))$ случайных величин $\xi(t)$ и $\xi(s)$. Также (1.13) можно переписать как

$$R(t,s)=M\xi(t)\xi(s)-M\xi(t)M\xi(s),\qquad t,s\in\mathbb{T}.\tag{1.14}$$

Положим в предыдущих равенствах $t=s$.

Определение 1.6. Функция $D\colon\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}_+$, заданная формулой[1)]

$$D\xi(t)=M\big(\xi(t)-M\xi(t)\big)^2,\qquad t\in\mathbb{T},\tag{1.15}$$

называется *дисперсией случайного процесса* $\xi(t)$.

[1)] Напомним, что $\mathbb{R}_+=\{x\geqslant 0\}$.

Свойства моментных функций случайного процесса вытекают из общих свойств математического ожидания. Мы здесь отметим только несколько из них.

1. Имеет место равенство $R(s,t) = R(t,s)$ для любых $t, s \in \mathbb{T}$.

2. Для любого набора неслучайных действительных чисел $z_1, \dots, z_n$ и любых значений $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ для корреляционной функции (1.13) справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i, t_j) z_i z_j \geqslant 0. \tag{1.16}$$

Положим $\xi^\circ(t) = \xi(t) - M\xi(t)$, тогда мы можем записать

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i, t_j) z_i z_j = \sum_{i,j=1}^{n} M\xi^\circ(t_i)\xi^\circ(t_j) z_i z_j = M\left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi^\circ(t_i)\xi^\circ(t_j) z_i z_j\right) =$$
$$= M\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\xi^\circ(t_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} z_j\xi^\circ(t_j)\right) = M\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\xi^\circ(t_i)\right)^2 \geqslant 0.$$

3. Из неравенства Чебышёва вытекает, что если дисперсия случайного процесса равна нулю в точке $t \in \mathbb{T}$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| > \varepsilon\big) \leqslant \frac{M\big|\xi(t) - M\xi(t)\big|^2}{\varepsilon} = \frac{D\xi(t)}{\varepsilon} = 0,$$

таким образом, $P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| > \varepsilon\big) = 0$, другими словами, $P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| \leqslant \varepsilon\big) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$, и мы имеем

$$P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| = 0\big) = P\big(\xi(t) = M\xi(t)\big) = 1,$$

то есть при данном t сечение ξ_t случайного процесса по сути не является случайной величиной: оно с вероятностью единица равно константе (величине $M\xi(t)$).

Пример 1.3. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – случайные процессы из примеров 1.1 и 1.2. Найдем их математические ожидания и ковариационные функции.

Решение. Имеем для всех $t > 0$

$$P(\xi_1(t) = t) = P(\xi_1(t) = t^{-1}) = \frac{1}{2}, \qquad M\xi_1(t) = t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} = \frac{t + 1/t}{2};$$

для процесса из примера 1.2

$$M\xi(t) = M(t + \nu) = t + M\nu = t,$$

поскольку t – неслучайный параметр, а случайная величина ν имеет нормальное распределение с параметром $\mu = M\nu = 0$.

Для расчёта ковариационной функции воспользуемся формулой (1.14) в её варианте для действительных процессов:

$$R(t,s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s), \qquad t, s > 0,$$

Получаем для процесса $\xi_1(t)$ следующее: $\xi_1(t)\xi_1(s) = t^\alpha \cdot s^\alpha = (ts)^\alpha$, поэтому

$$M\xi_1(t)\xi_1(s) = M(ts)^\alpha = (ts)^1 \cdot \frac{1}{2} + (ts)^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ts + 1/ts}{2}.$$

В результате

$$R(t,s) = \frac{ts + 1/ts}{2} - \frac{t + 1/t}{2}\frac{s + 1/s}{2} = \frac{ts - s/t - t/s + 1/ts}{4}, \qquad t, s > 0.$$

Для процесса $\xi_2(t)$ имеем

$$M\xi(t)\xi(s) = M(t+\nu)(s+\nu) = ts + (t+s)M\nu + M\nu^2 = ts + 1,$$

где мы воспользовались тем, что $M\nu = 0$, $M\nu^2 = D\nu + (M\nu)^2 = D\nu = \sigma^2 = 1$. Отсюда

$$R(t,s) = ts + 1 - ts = 1, \qquad t, s > 0.$$

Итак, в данном случае ковариационная функция тождественно равна единице.

Положив $t = s$, получим дисперсии:

$$D\xi_1(t) = \frac{t^2 - 2 + 1/t^2}{4} = \left(\frac{t - 1/t}{2}\right)^2, \qquad D\xi_2(t) = 1, \qquad t > 0.$$

Эти выражения, впрочем, можно было получить и непосредственно, рассчитав дисперсии случайных велчин t^α и $t + \nu$.

Независимость приращений и одородность процесса. В теории вероятностей часто отождествляют случайную величину и её распределение. Другими словами, когда говорят о случайной величине, фиксируют не функциональную зависимость $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, а функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$. Так, мы говорим, например, о нормально распределённой случайной величине, подчёркивая именно характер её распределения, и не интересуемся тем стохастическим экспериментом, который лежит в основе случайности этой величины.

Аналогично, задание случайного процесса почти всегда понимают как задание семейства его конечномерных распределений. Однако в общем случае определить многомерные распределения затруднительно, да и формулы весьма громоздки. В теории вероятностей можно существенно упростить выкладки, предположив независимость случайных величин. Возникает вопрос, как задаётся независимость в теории случайных процессов?

Простейшей является идея потребовать, чтобы любые два сечения процесса ξ_t и ξ_s были независимыми при $t \neq s$. Или, если рассуждать в терминах моментных функций, считать, что $R(t,s) = 0$ при $t \neq s$. Такой случайный процесс называется *дельта-коррелированным.* Однако трудно представить себе физическое явление, математической моделью которого является дельта-коррелированный процесс: в самом деле, едва ли сечения независимы в сколь угодно близкие моменты времени. Куда более реалистичным является следующее предположение.

Пусть $\mathbb{T} = \{t \geqslant 0\}$. Выберем два значения t и s такие, что $0 \leqslant s < t$. Назовём *приращением случайного процесса* (от момента времени s к моменту времени t) случайную величину $\xi(t) - \xi(s)$. Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, является *процессом с независимыми приращениями*, если для любого $n = 2, 3, \ldots$ и для любых $t_1, \ldots, t_n$ таких, что $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, случайные величины $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, независимы (в совокупности).

Дадим ещё одно определение. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, является *однородным* (во времени), если для любых $0 \leqslant s < t$ распределение приращения $\xi(t) - \xi(s)$ зависит только от $t - s$. Смысл этого определения в том, что вероятностное поведение приращения определяется только длиной временно́го промежутка, на котором рассматривается приращение, но не положением этого промежутка на оси времени. Для однородных процессов мы будем использовать обозначение $\xi(t) - \xi(s) = \Delta\xi(t - s)$, памятуя о том, что случайная величина – это в сущности её распределение. Однако следует обратить внимание на то, что однородность процесса не означает, что случайная величина $\xi(t) - \xi(s)$ зависит от $t - s$ и не зависит от t и s по отдельности, такое условие наложено только на её распределение.

Докажем одно общее утверждение.

Утверждение 1.1. *Если случайный процесс $\xi(t), t \geqslant 0$, имеет независимое приращения и начинается в нуле, т. е. $\xi(0) = 0$ с вероятностью единица, то его ковариационная функция $R(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, зависит от $\min(t, s)$, но не от каждой из своих переменных по отдельности, и $R(t, s) = D(\min(t, s))$, где $D(t)$, $t \geqslant 0$, – дисперсия случайного процесса..*

Доказательство. Пусть для определённости $0 < s < t$. При таком условии мы имеем два приращения на промежутках $[0, s)$ и $[s, t)$:

$$\Delta\xi_1 = \xi(s) - \xi(0) = xi(s), \qquad \Delta\xi_2 = \xi(t) - \xi(s),$$

где мы учли, что $P(\xi(0) = 0) = 1$. При этом

$$\xi(s) = \Delta\xi_1, \quad \xi(t) = \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R(t, s) &\stackrel{\text{def}}{=\!=} M\big(\xi(s) - M\xi(s)\big)\big(\xi(t) - M\xi(t)\big) = \\ &= M\big(\Delta\xi_1 - M\Delta\xi_1\big)\big(\Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 - M(\Delta\xi_1 + \Delta\xi_2)\big) = \\ &= M(\Delta\xi_1 - M\Delta\xi_1)(\Delta\xi_1 - M\Delta\xi_1) + M(\Delta\xi_1 - M\Delta\xi_1) \cdot M(\Delta\xi_2 - M\Delta\xi_2), \end{aligned}$$

где мы учли, что приращения $\Delta\xi_1$ и $\Delta\xi_2$ независимы по условию. Понятно, что $M(\Delta\xi_1 - M\Delta\xi_1) = 0$, $M(\Delta\xi_2 - M\Delta\xi_2) = 0$, таким образом, для $s < t$

$$R(t, s) = M(\Delta\xi_1 - M\Delta\xi_1)^2 == M(\xi(s) - M\xi(s))^2 = D(s).$$

Меняя местами s и t, получаем, что $R(s, t) = R(t, s) = D(t)$ для $t < s$. Равенство $R(t, t) = D(t)$ очевидно, в итоге имеем общую формулу

$$R(t, s) = D(t_*), \quad t_* = \min(t, s). \tag{1.17}$$

Итоги. Случайный процесс есть семейство случайных величин, зависящих от параметра t. Как правило, полагают, что этот параметр – действительное число, но возможны и другие способы его задания. Также, как правило, рассматриваются случайные процессы со значениями в поле действительных или комплексных чисел. Выбрав одну случайную величину из этого семейства при заданном значении параметра t, мы получим так называемое сечение случайного процесса в точке t. Конечномерные (n-мерные) распределения случайного процесса суть совместные распределения n случайных величин, представляющих собой сечения случайного процесса в любых точках $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$.

Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса рассчитываются как математическое ожидание и дисперсия сечения случайного процесса в каждой точке $t \in \mathbb{T}$. Для их расчёта необходимо знать одномерную функцию распределения. Значение ковариационной функции случайного процесса равно коэффициенту ковариации двух сечений случайного процесса в точках $t, s \in \mathbb{T}$. Для его расчёта необходимо знать двумерную функцию распределения. Исследование функций распределения и моментных функций, а также методы их расчёта и анализа опираются на стандартные утверждения и теоремы теории вероятностей.

Важными свойствами распределений случайных процессов являются независимость приращений процесса для непересекающихся промежутков времени и однородность процесса, т. е. независимость распределения приращения процесса от начала отсчёта времени. Эти свойства, с одной стороны, физически реальны, с другой стороны, существенно облегчают математическое исследование процесса.

2. ПРОЦЕСС ПУАССОНА

В этом разделе мы рассмотрим один из самых известных случайных процессов, который может служить математической моделью широчайшего круга явлений.

2.1. Определение и основные характеристики процесса Пуассона.

Определение 2.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, называется *процессом Пуассона*, если его приращения $\xi(t) - \xi(s)$, $0 \leqslant s < t$, удовлетворяют следующим условиям:

• независимость приращений: для любого $n = 2, 3, \dots$ и любых $t_0, t_1, \dots, t_n$ таких, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, приращения $\Delta\xi(t_k - t_{k-1})$, $k = 2, 3, \dots, n$, – независимые случайные величины;

• однородность процесса во времени: для любых $t > s \geqslant 0$ распределение приращения $\xi(t) - \xi(s)$ зависит только от $t - s$;

• каждое приращение распределено по Пуассону: для $t > s \geqslant 0$

$$P(\xi(t) - \xi(s) = m) = \frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}\, e^{-\lambda(t-s)}, \qquad m = 0, 1, \dots \tag{2.1}$$

(здесь $\lambda = \mathrm{const}$, $0 < \lambda < \infty$).

• Наложим также условие, что процесс начинается в нуле: $P(\xi(0) = 0) = 1$.

Непосредственно из определения вытекает, что сечение процесса для $t > 0$ можно записать как $\xi(t) = \xi(t) - \xi(0)$, и оно распределено по Пуассону:

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, \dots \tag{2.2}$$

Также можно заметить, что это согласуется с $P(\xi(0) = 0) = 1$, если в (2.2) формально перейти к пределу $t \to s + 0$. Кроме того, условие однородности процесса согласовано с (2.1): распределение приращения полностью определяется параметром $\lambda(t - s)$.

Определим вероятностные характеристики процесса Пуассона.

Найдём n-мерное распределение процесса Пуассона, для $t_1, \dots, t_n > 0$ вычислим

$$P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \dots, \xi(t_n) = m_n). \tag{2.3}$$

В силу независимости распределения от порядка событий $\xi(t_j) = m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, мы без ограничения общности можем считать, что $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ (для краткости последующих формул мы ввели $t_0 = 0$). Приращение $\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})$ распределено по Пуассону, поэтому неотрицательно (т. е. $\xi(t_j) \geqslant \xi_{j-1}$) с вероятностью единица, следовательно, $P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \dots, \xi(t_n) = m_n) \neq 0$, только если $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n$. Положим $m_0 = 0$ и введём приращения $\Delta\xi_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ для $k = 1, \dots, n$.

Нетрудно заметить, что равносильны события

$$\xi(t_1) = m_1,\ \xi_2(t_2) = m_2,\ \dots\ ,\ \xi(t_n) = m_n$$

и

$$\Delta\xi_1 = m_1 - m_0\ , \Delta\xi_2 = m_2 - m_1,\ \dots\ ,\ \Delta\xi_n = m_n - m_{n-1};$$

при этом по определению $\Delta\xi_k$, $k=1,\dots,n$, независимы и

$$P(\Delta\xi_k = m_k - m_{k-1}) = \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{m_k - m_{k-1}}}{(m_k - m_{k-1})!}\, e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}.$$

Отсюда для $0 = m_0 \leqslant m_1 \leqslant \dots \leqslant m_m$

$$\begin{aligned} P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \dots, \xi(t_n) = m_n) &= \\ = \prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{m_k - m_{k-1}}}{(m_k - m_{k-1})!}\, e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}&. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так выглядит n-мерное распределение процесса Пуассона.

Можно привести это распределение к более интересному виду: заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} (m_k - m_{k-1}) = m_n, \qquad \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = t_n, \qquad \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} = e^{-\lambda t_n}$$

и, если положить $p_k = \frac{\lambda(t_k - t_{k-1})}{\lambda t_n} = \frac{t_k - t_{k-1}}{t_n}$, то $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ и

$$\frac{1}{(\lambda t_n)^{m_n}} \prod_{k=1}^{n} (\lambda(t_k - t_{k-1}))^{m_k - m_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{m_k - m_{k-1}}}{(\lambda t_n)^{m_k - m_{k-1}}} = \prod_{k=1}^{n} p_k^{m_k - m_{k-1}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{m_k - m_{k-1}}}{(m_k - m_{k-1})!}\, e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} = \\ &\quad = \frac{(\lambda t_n)^{m_n}}{m_n!}\, e^{-\lambda t_n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \dots, p_n}(m_1 - m_0, m_2 - m_1, \dots, m_n - m_{n-1}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \dots, p_n}(j_1, j_2, \dots, j_n) = \frac{j_1!\, j_2!\, \dots j_n!}{(j_1 + j_2 + \dots + j_n)!} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_1^{j_n} \tag{2.6}$$

есть так называемая полиномиальная вероятность. Она является обобщением биномиальной вероятности $C_m^j p^j q^{m-j}$ на случай, когда в каждом из m независимых испытаний мы имеем не два возможных исхода (успех и неудачу), а исход одного из n типов. При этом $p_1, p_2, \dots p_n$ задают распределение этих возможных исходов в единичном акте эксперимента ($p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$). Вероятность $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \dots, p_n}(j_1, j_2, \dots, j_n)$ есть вероятность того, что в m_n независимых испытаниях исход первого типа случится j_1 раз, исход второго типа случится j_2 раз и т. д., вплоть до того, что исход n-го типа случится j_n раз, при этом $j_1 + \dots + j_n = m$, т. е. в сумме мы имеем полное число испытаний.

При $n = 2$ вероятность $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \dots, p_n}(j_1, j_2, \dots, j_n)$ переходит в биномиальную, и мы имеем произведение пуассоновой и биномиальной вероятностей:

$$P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2) = \frac{(\lambda t_2)^{m_2}}{m_2!}\, e^{-\lambda t_2} \cdot C_{m_2}^{m_1} p^{m_1} q^{m_2 - m_1}, \qquad p = \frac{t_1}{t_2},\ \ q = \frac{t_2 - t_1}{t_2}.$$

Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию процесса Пуассона. Напрямую из свойств распределения Пуассона получаем, что

$$M\xi(t) = \lambda t, \qquad D\xi(t) = \lambda t.$$

Можно сказать, что λ равно среднему числу элементарных событий в промежутке единичной длительности (при $t = 1$). Параметр λ называется *интенсивностью* процесса Пуассона.

Для расчёта ковариационной функции воспользуемся утверждением 1.1: в соответствии с формулой (1.17) имеем $R(t,s) = D\xi(\min(t,s)) = \lambda \min(t,s)$.

Пуассонов поток требований. Рассмотрим физические явления, которые могут математически описываться как процесс Пуассона. Предположим, что в случайные моменты времени происходят некоторые события. Будем называть эти события требованиями, чтобы отличать от других, более сложных, случайных событий, возникающих в нашем рассмотрении. Пусть $\xi(t)$ – число требований, поступивших к моменту времени t, т. е. в промежуток времени $[0,t)$, тогда $\xi(t+h) - \xi(t)$ равно числу требований, поступивших в промежуток $[t, t+h)$. Очевидно, $\xi(t+h) - \xi(t)$ есть случайная величина, принимающая значения $0, 1, 2, \ldots$.

Будем говорить, что $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, есть *пуассонов поток требований*, если он удовлетворяет следующим условиям:

• для любых $t, h > 0$ распределение числа требований $\xi(t+h) - \xi(t) = \Delta\xi(h)$ на интервале $[t, t+h)$ зависит только от h и не зависит от t (однородность потока);

• для любых $n = 2, 3, \ldots$ и $t_1, \ldots, t_n$ таких, что $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, приращения $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, независимы;

• при $h \to +0$ распределение случайной величины $\Delta\xi(h) = \xi(t+h) - \xi(t)$ удовлетворяет следующим асимптотическим равенствам:

$$P(\Delta\xi(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \tag{2.7}$$

$$P(\Delta\xi(h) = 1) = \lambda h + o(h), \tag{2.8}$$

$$P(\Delta\xi(h) > 1) = o(h), \tag{2.9}$$

где λ – постоянная величина, $0 < \lambda < \infty$.

Видно, что два первых условия в точности повторяют условия однородности и независимости приращений для процесса Пуассона.

Обсудим последнее условие. Положим

$$p_0(h) \stackrel{\text{def}}{=\!=} P(\Delta\xi(h) = 0), \qquad h > 0.$$

Доопределим эту вероятность в нуле как $p_0(0) = 1$, поскольку в промежуток $[t,t)$ нулевой длины не может поступить ни одного требования. Предположим, что $p_0(h)$ при $h \to +0$ ведёт себя непрерывным образом: $p_0(h) \to 1 - 0$ (вероятность стремится к $p(0) = 1$, разумеется, снизу). Теперь нас будут интересовать поправки к предельному значению при малых $h > 0$. Будем считать, что возможно разложение в ряд Тейлора до членов первого порядка:

$$p_0(h) = p_0(0) + \left.\frac{dp_0(h)}{dh}\right|_{h=0} \cdot h + o(h), \qquad h \to +0.$$

Тогда условия (2.7)–(2.9) означают, что вся поправка первого порядка «исчерпывается» событием $\Delta\xi(h) = 1$, а события $\Delta\xi(h) > 1$ чрезвычайно редки, имеют вероятность порядка $o(h)$. Таким образом, можно сказать, что условия (2.7)–(2.9) гарантируют малую интенсивность (редкость) событий в потоке.

Теорема 2.1. *Пусть поток элементарных случайных событий является пуассоновым, т. е. удовлетворяет условиям независимости приращений, однородности во времени и условиям* (2.7)–(2.9). *Тогда случайная величина $\xi(t)$ при каждом $t > 0$ имеет распределение Пуассона с параметром λt*:

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots\ . \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть значение $t > 0$ и число $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ фиксированы. Выберем произвольное и пока также фиксированное натуральное число $n > 1$. Разобьем промежуток $[0, t)$ точками $t_0, t_1, \dots, t_n$ на n интервалов одинаковой длины:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, \qquad h = t_k - t_{k-1} = \frac{t}{n} \quad \text{для всех} \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $\Delta\xi_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ – случайная величина, равная количеству требований, поступивших на интервале $[t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Введём событие A_n, которое происходит, если и только если случайные величины $\Delta\xi_k$ для любых $k = 1, 2, \dots, n$ не превосходят единицы. Если хотя бы одна из случайных величин $\Delta\xi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, приняла значение, большее единицы, то произошло событие $\overline{\mathrm{A}}_n$. Можно записать математические выражения для введённых событий:

$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n} \{\Delta\xi_k = 0, 1\}, \qquad \overline{\mathrm{A}}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \{\Delta\xi_k > 1\}.$$

Запишем очевидную формулу

$$P(\xi(t) = m) = P(\{\xi(t) = m\} \cap A_n) + P\{\xi(t) = m\} \cap \overline{\mathrm{A}}_n) \tag{2.11}$$

и рассмотрим вероятности событий в правой части. Имеем для $\Delta\xi_k = \Delta\xi(h)$ в силу (2.9)

$$P(\overline{\mathrm{A}}_n) = P\biggl(\bigcup_{k=1}^{n} \{\Delta\xi_k > 1\}\biggr) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(\Delta\xi_k > 1) = n \cdot o(h) = n \cdot o(t/n).$$

Тогда при любом фиксированном $t > 0$ мы имеем

$$P(\overline{\mathrm{A}}_n) \to 0, \quad P(\{\xi(t) = m\} \cup \overline{\mathrm{A}}_n) \leqslant P(\overline{\mathrm{A}}_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{2.12}$$

Для события $\{\xi(t) = m\} \cup \overline{\mathrm{A}}_n$ мы имеем

$$\xi(t) = \Delta\xi_1 + \dots + \Delta\xi_n = m, \qquad \Delta\xi_k = 0 \ \text{или} \ \Delta\xi_k = 1 \ \text{для всех} \ k = 1, 2, \dots, n,$$

и в силу условий независимости приращений и однородности потока все случайные величины $\Delta\xi_1, \dots, \Delta\xi_n$ независимы и одинаково распределены. Другими словами, мы имеем схему n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха

$$p_n = P(\Delta\xi_k = 1) = \lambda h + o(h) = \frac{\lambda t}{n} + o\biggl(\frac{t}{n}\biggr)$$

(см. условие (2.8)). В рамках этой схемы

$$P(\{\xi(t) = m\} \cup \overline{\mathrm{A}}_n) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m}, \qquad np_n = \lambda t + n + o\left(\frac{t}{n}\right).$$

В пределе по теореме Пуассона имеем для любого фиксированного $m = 0, 1, \ldots$

$$P(\{\xi(t) = m\} \cup \overline{\mathrm{A}}_n) \to \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad n \to \infty. \tag{2.13}$$

Объединяя соотношения (2.11)–(2.13), получаем

$$P(\xi(t) = m) = P(X_m \cap A_n) + P(X_m \cap \overline{\mathrm{A}}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}.$$

Поскольку выражение в левой части равенства не зависит от n, мы обязаны записать

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, \ldots \; .$$

Теорема доказана.

Если вспомнить, что в потоке событий $P(\xi(0) = 0) = 1$, и учесть условие однородности потока, то мы получим, что случайная величина $\xi(t) - \xi(s)$ при $0 < s < t$ распределена так же, как случайная величина $\xi(t - s) - \xi(0) = \xi(t - s)$, поэтому

$$P(\xi(t) - \xi(s) = m) = \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!}\, e^{-\lambda(t-s)}, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

что совпадает с (2.1). Таким образом, любой пуассонов поток событий является процессом Пуассона. В дальнейшем мы будем пользоваться обеими интерпретациями процесса Пуассона: и его математическим определением, и его физическим представлением как потока требований.

Траектории $\xi_\omega(t)$, $t \geqslant 0$, пуассонова потока (процесса Пуассона) представляют собой кусочно-постоянные функции, выходящие из нуля, $\xi_\omega(0) = 0$, в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ испытывающие скачок, равный $+1$:

$$\xi_\omega(\tau_k) = k - 1, \qquad \xi_\omega(\tau_k + 0) = k, \qquad k = 1, 2, \ldots \; .$$

Момент времени $t = \tau_k$ есть время поступления k-го требования. Очевидно, что с вероятностью единица

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots .$$

Распределения, связанные с временами поступления требований. Найдём связь между распределением времени τ_k и распределением процесса Пуассона. Если $\tau_k \geqslant t$, то k-е требование поступило самое раннее в момент времени t, следовательно, на промежутке $[0, t)$ мы имеем строго меньше, чем k требований, $\xi(t) < k$. Таким образом, $\tau_k \geqslant t$ влечёт $\xi(t) < k$. Наоборот, если $\xi(t) < k$, то на промежутке $[0, t)$ мы имеем строго меньше чем k требований, следовательно, k-е требование поступило в момент времени t или когда-то позже, иначе говоря, $\xi(t) < k$ влечёт $\tau_k \geqslant t$. Итак,

$$\tau_k \geqslant t \iff \xi(t) < k, \qquad \tau_k < t \iff \xi(t) \geqslant k. \tag{2.14}$$

Отсюда

$$t_1 \leqslant \tau_k < t_2 = \{\tau_k \geqslant t_1\} \cap \{\tau_k < t_2\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\xi(t_1) < k\} \cap \{\xi(t_2) \geqslant k\}. \tag{2.15}$$

Пример 2.1. Найдём распределение случайной величины τ_k.

Решение. С учётом эквивалентности событий (2.14) функция распределения случайной величины τ_{τ_k} записывается как

$$F_{\tau_k}(t) \overset{\text{def}}{=\!=} P(\tau_{\tau_k} < t) = 1 - P(\tau_{\tau_k} \geqslant t) = 1 - P(\xi(t) < k) = P(\xi(t) \geqslant k),$$

в явном виде

$$F_{\tau_k}(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad t > 0. \tag{2.16}$$

При этом $F_{\tau_k}(0) = P(\tau_{\tau_k} < 0) = 0$. Для $k = 1$ получаем

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad p_1(t) = F_1'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t > 0,$$

т. е. τ_1 имеет экспоненциальное распределение с параметром λ.

Найдём плотность вероятности случайной величины τ_{τ_k} для $k > 1$:

$$\begin{aligned} p_{\tau_k}(t) &= \frac{dF_{\tau_k}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} = \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} = \sum_{m=k}^{\infty} \left(\lambda \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} - \lambda \frac{(\lambda t)^m}{m!}\right) e^{-\lambda t} = \\ &= \lambda \left(\sum_{m=k-1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} - \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\right) e^{-\lambda t} = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Плотность вероятности $p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$, задаётся тем же выражением, если в нём положить $k = 1$, поэтому

$$p_{\tau_k}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.17}$$

Пример 2.2. Найдём совместное распределение случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Решение. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Поскольку $\tau_1 < \tau_2$ с вероятностью единица, $p_{\tau_1,\tau_2}(t_1, t_2) = 0$ при $t_1 > t_2$. Поэтому положим $0 < t_1 < t_2$. Найдём

$$P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2)$$

в первом порядке по $\Delta t_1 \Delta t_2$ и воспользуемся дифференциальным равенством, задающим плотность вероятности:

$$p_{\tau_1,\tau_2}(t_1, t_2) = \lim_{\Delta t_1, \Delta t_2 \to +0} \frac{P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2}.$$

Выберем Δt_1 настолько малым, чтобы было выполнено неравенство $t_1 + \Delta t_1 < t_2$.

Теперь перепишем искомую вероятность в терминах процесса Пуассона. Воспользуемся эквивалентностью событий (2.15) при $k = 1, 2$ и запишем несколько равносильных условий:

$$
\begin{gathered}
t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1, \qquad t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2 \\
\Updownarrow \\
\xi(t_1) < 1, \quad \xi(t_1 + \Delta t_1) \geqslant 1, \qquad \xi(t_2) < 2, \quad \xi(t_2 + \Delta t_2) \geqslant 2 \\
\Updownarrow \\
\xi(t_1) = 0, \quad \xi(t_1 + \Delta t_1) = 1, \qquad \xi(t_2) = 1, \quad \xi(t_2 + \Delta t_2) \geqslant 2 \\
\Updownarrow \\
\xi(t_1) - \xi(0) = 0, \quad \xi(t_1 + \Delta t_1) - \xi(t_1) = 1, \\
\xi(t_2) - \xi(t_1 + \Delta t_1) = 0, \quad \xi(t_2 + \Delta t_2) - \xi(t_2) \geqslant 1,
\end{gathered}
\tag{2.18}
$$

где мы учли, что $t_1 + \Delta t_1 < t_2$ и что траектории процесса Пуассона не убывают. Поэтому, например, события $\xi(t_1 + \Delta t_1) \geqslant 1$ и $\xi(t_2) < 2$ могут произойти вместе тогда и только тогда, когда $\xi(t_1 + \Delta t_1) = 1$ и $\xi(t_2) = 1$.

Кроме того, в силу $0 < t_1 < t_1 + \Delta t_1 < t_2 < t_2 + \Delta t_2$ все приращения в последнем блоке событий в (2.18) независимы и $\xi(0) = 0$ с вероятностью единица. В результате

$$
\begin{aligned}
&P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2) = \\
&= P(\xi(t_1) = 0) \cdot P(\Delta\xi(\Delta t_1) = 1) \cdot P(\Delta\xi(t_2 - t_1 - \Delta t_1) = 0) \cdot P(\Delta\xi(\Delta t_2) \geqslant 1).
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Первые три вероятности очевидны,

$$
\begin{gathered}
P(\xi(t_1) = 0) = e^{-\lambda t_1}, \qquad P(\Delta\xi(\Delta t_1) = 1) = \lambda \Delta t_1\, e^{-\lambda \Delta t_1}, \\
P(\Delta\xi(t_2 - t_1 - \Delta t_1) = 0) = e^{-\lambda(t_2 - t_1 - \Delta t_1)} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} e^{-\lambda \Delta t_1},
\end{gathered}
$$

а последнюю вероятность запишем как

$$
P(\Delta\xi(\Delta t_2) \geqslant 1) = 1 - P(\Delta\xi(\Delta t_2) = 0) = 1 - e^{-\lambda \Delta t_2} = \lambda \Delta t_2 + o(\Delta t_2).
$$

Записываем (2.19) в первом порядке малости по $\Delta t_1 \Delta t_2$. Мы уже имеем в явном виде Δt_1, Δt_2 во втором и четвёртом сомножителях в правой части (2.19), поэтому в показателях экспонент кладём $\Delta t_k = 0$, суммируем показатели экспонент и получаем окончательный ответ

$$
P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2) = \lambda^2\, e^{-\lambda t_2} \cdot \Delta t_1 \Delta t_2,
$$

откуда (не забываем про ограничение $0 < t_1 < t_2$)

$$
p_{\tau_1, \tau_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda^2\, e^{-\lambda t_2} & \text{при } 0 < t_1 < t_2, \\ \quad 0 & \text{при прочих } t_1, t_2. \end{cases}
\tag{2.20}
$$

Нетрудно получить обобщение на случай произвольного n. Если $0 < t_1 < \cdots < t_n$ и $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_{n-1}$ настолько малы, что $t_1 + \Delta t_1 < t_2, \ldots, t_{n-1} + \Delta t_{n-1} < t_n$, то мы имеем аналогично (2.19)

$$
P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2, \ldots,\, t_n \leqslant \tau_n < t_n + \Delta t_n) =
$$

$$= P(\xi(t_1) = 0) \cdot P(\Delta\xi(\Delta t_1) = 1) \cdot P(\Delta\xi(t_2 - t_1 - \Delta t_1) = 0) \times$$
$$\times P(\Delta\xi(\Delta t_2) = 1) \cdot P(\Delta\xi(t_3 - t_2 - \Delta t_2) = 0) \times \cdots$$
$$\cdots \times P(\Delta\xi(\Delta t_{n-1}) = 1) \cdot P(\Delta\xi(t_n - t_{n-1} - \Delta t_{n-1}) = 0) \cdot P(\Delta\xi(\Delta t_n) \geqslant 1).$$

Как и выше, первый порядок малости по Δt_n дают $P(\Delta\xi(\Delta t_k) = 1)$, поэтому $P(\Delta\xi(t_n - t_{n-1} - \Delta t_{n-1}) = 0)$ мы заменяем на $e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}$, собираем показатели экспонент и получаем ответ:

$$p_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_2}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n} & \text{при } t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \\ 0 & \text{при прочих } t_1, t_2, \ldots, t_n. \end{cases} \tag{2.21}$$

Хотя создаётся впечатление, что плотность вероятности (2.21) зависит только от «старшего» времени t_n, на самом деле это не так: зависимость от остальных времён содержится в условии $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, ограничивающих область ненулевых значений плотности.

Пример 2.3. Покажем, что промежутки времени $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ (считаем, что $\tau_0 = 0$ с вероятностью единица и, следовательно, $\Delta\tau_1 = \tau_1$) между последовательными моментами поступления требований в пуассоновом потоке независимы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ для любого $n > 1$, и каждая из случайных величин $\Delta\tau_k$ имеет экспоненциальное распределение, её плотность вероятности есть $\lambda e^{-\lambda t}$ для $t > 0$.

Решение. Вновь начнём с $n = 2$. Пусть $u_1, u_2 > 0$. Имеем в силу стандартных формул теории вероятностей и выражения (2.20) для двумерной плотности вероятности

$$F_{\Delta\tau_1,\Delta\tau_2}(u_1, u_2) = P(\tau_1 < u_1,\, \tau_2 - \tau_1 < u_2) =$$
$$= \iint\limits_{t_1<u_1,\ t_2-t_1<u_2} p_{\tau_1,\tau_2}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = \iint\limits_{\substack{0<t_1<t_2,\\ t_1<u_1,\\ t_2-t_1<u_2}} \lambda^2 e^{-\lambda t_2}\, dt_1\, dt_2 =$$
$$= \int_0^{u_1} \lambda\, dt_1 \int_{t_1}^{t_1+u_2} \lambda\, e^{-\lambda t_2}\, dt_2 = (1 - e^{-\lambda u_2})(1 - e^{-\lambda u_1}).$$

Видно, что $F_{\Delta\tau_1,\Delta\tau_2}(u_1, u_2) = F_{\Delta\tau_1}(u_1) F_{\Delta\tau_2}(u_2)$, где $F_{\Delta\tau_k}(u_k) = (1 - e^{-\lambda u_k})$, $k = 1, 2$, при $u_1, u_2 > 0$. Отсюда вытекает независимость случайных величин $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$, а также, что каждая из них имеет плотность $p_{\Delta\tau_k}(u_k) = e^{-\lambda u_k}$ при $u_k > 0$, $k = 1, 2$.

При произвольном натуральном $n > 2$ имеем

$$F_{\Delta\tau_1,\Delta\tau_2,\ldots,\Delta\tau_2}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = P(\tau_1 < u_1,\, \tau_2 - \tau_1 < u_2, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1} < u_n) =$$
$$= \iint\limits_{\substack{t_1<u_1,\, t_2-t_1<u_2,\\ \ldots,\\ t_n-t_{n-1}<u_n}} \cdots \int p_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n}(t_1, t_2, \ldots t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n =$$
$$= \iint\limits_{\substack{0<t_1<t_2<\cdots<t_n,\\ t_1<u_1,\, t_2-t_1<u_2,\\ \ldots,\\ t_n-t_{n-1}<u_n}} \lambda^n e^{-\lambda t_n}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= \int_0^{u_1} \lambda\, dt_1 \int_{t_1}^{t_1+u_2} \lambda\, dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+u_n} \lambda\, e^{-\lambda t_n}\, dt_n.$$

Повторные интегралы вычислить несложно: последний (внутренний) интеграл равен

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+u_n} \lambda\, e^{-\lambda t_n}\, dt_n = e^{-\lambda t_{n-1}} - e^{-\lambda(t_{n-1}+u_n)} = (1 - e^{-\lambda u_n}) e^{-\lambda t_{n-1}}.$$

Видно, что не зависящий от всех t_k множитель $1 - e^{-\lambda u_n}$ выносится, а множитель $e^{-\lambda t_{n-1}}$ переходит в следующий интеграл:

$$\int_{t_{n-2}}^{t_{n-2}+u_{n-1}} \lambda\, e^{-\lambda t_{n-1}}\, dt_{n-1} = e^{-\lambda t_{n-2}} - e^{-\lambda(t_{n-2}+u_{n-1})} = (1 - e^{-\lambda u_{n-1}}) e^{-\lambda t_{n-2}}.$$

Таким образом, последовательное взятие интегралов по $t_n, t_{n-1}, \ldots t_2$ в конечном итоге даёт при всех $u_k > 0$

$$F_{\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots, \Delta\tau_2}(u_1, u_2, \ldots, u_n) =$$
$$= (1 - e^{-\lambda u_n})(1 - e^{-\lambda u_{n-1}}) \ldots (1 - e^{-\lambda u_2}) \int_0^{u_1} \lambda\, e^{-\lambda t_1}\, dt_1 = \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{-\lambda u_k}).$$

Отсюда вытекает независимость случайных величин $\Delta\tau_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а также, что каждая из них имеет плотность $p_{\Delta\tau_k}(u_k) = e^{-\lambda u_k}$ при $u_k > 0$.

Замечание 2.1. Пусть случайная величина τ имеет экспоненциальное распределение, $p_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Найдём условную вероятность $P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t)$. Имеем при $t, s > 0$

$$P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t) = \frac{P(t \leqslant \tau < t + s,\, \tau \geqslant t)}{P(\tau \geqslant t)} = \frac{P(t \leqslant \tau < t + s)}{P(\tau \geqslant t)}.$$

Находим вероятности

$$P(t \leqslant \tau < t + s) = \int_t^{t+s} \lambda e^{-\lambda u}\, du = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)},$$
$$P(\tau \geqslant t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\, du = e^{-\lambda t}.$$

Отсюда условная вероятность

$$P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s}$$

не зависит от t и совпадает с $P(0 \leqslant \tau < s)$. Другими словами, экспоненциальное распределение не имеет «памяти»: если требование не поступило к моменту времени t, то условная вероятность того, что оно поступит в следующие s единиц времени, не зависит от t, т. е. от того, как долго мы ждали поступления этого требования раньше.

Замечание 2.2. Поскольку $\tau_k = \Delta\tau_1 + \cdots + \Delta\tau_k$, получаем, что сумма независимых и одинаково экспоненциально (с одним параметром λ) распределённых случайных величин $\Delta\tau_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеет плотность вероятности вида (2.17):

$$p_{\Delta\tau_1+\cdots+\Delta\tau_k}(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Замечание 2.3. Условие, что случайные величины $\Delta\tau_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, независимы и одинаково экспоненциально распределены, не только является следствием того, что мы рассматриваем пуассонов поток требований, но и, наоборот, само определяет поток требований как пуассонов.

Пусть при указанных условиях $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – случайные моменты поступления требований в некотором потоке, а $\xi(t)$ равно количеству требований на временно́м интервале $[0, t)$. Тогда для $m > 0$

$$\xi(t) = m \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_m \leqslant t < \tau_{m+1},$$

поэтому

$$P(\xi(t) = m) = P(\tau_m \leqslant t, \tau_{m+1} > t) = P(\tau_m \leqslant t, \tau_m + \Delta\tau_{m+1} > t),$$

причём $\tau_m = \Delta\tau_1 + \cdots + \Delta\tau_m$ и потому не зависит от $\Delta\tau_{m+1}$. Тогда

$$P(\xi(t) = m) = \iint\limits_{\substack{x \leqslant t,\\ x+u>t}} p_{\tau_m}(x) p_{\Delta\tau_{m+1}}(u)\, dx\, du = \iint\limits_{\substack{x \leqslant t,\\ x+u>t}} \lambda\frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda u}\, dx\, du.$$

Здесь мы воспользовались замечанием 2.2, чтобы записать $p_{\tau_m}(x)$. Переходя к повторным интегралам, имеем для $m = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} P(\xi(t) = m) &= \int_0^t \lambda\frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{-\lambda x}\, dx \int_{t-x}^{\infty} e^{-\lambda u}\, du = \\ &= \int_0^t \lambda\frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)}\, dx = e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!}\, dx = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Очевидно $P(\xi(t) = 0 = P(\tau_0 \geqslant t) = e^{-\lambda t}$. Таким образом, мы получили, что любое сечение $\xi(t)$ распределено по Пуассону. Если потребовать (или доказать), что этот процесс имеет независимые приращения и однороден во времени, то мы получим, что $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона.

Пример 2.4. Пусть случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ независимы и имеют одинаковые математическое ожидание и дисперсию, $M\alpha_j = a$, $D\alpha_j = d^2$. Положим $P(\alpha_0 = 0) = 1$. Определим $N(t)$, $t \geqslant 0$, как процесс Пуассона с интенсивностью λ, причём любое сечение этого процесса и случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ будем также считать независимыми. Случайный процесс $\xi(t)$ задан формулой

$$\xi(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} \alpha_j, \qquad t \geqslant 0.$$

Найдём математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$.

Решение. Возьмём полную группу событий $N(t) = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и разложим одномерную функцию распределения процесса $\xi(t)$ по этой полной группе:

$$F_\xi(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi(t) < x \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\xi(x, t \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n),$$

где через $F_\xi(\,\cdot \,|\, N(t) = n)$ мы обозначили условную (при условии $N(t) = n$) одномерную функцию распределения случайного процесса. Тогда математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$ также разложится в сумму условных математических ожиданий (здесь мы не приводим строгого математического обоснования законности перестановки интеграла и суммы):

$$M\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_\xi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_\xi(x, t \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} M(\xi(t) \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n).$$

Далее, по условию

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, e^{-\lambda t}$$

и, самое главное,

$$M(\xi(t) \,|\, N(t) = n) = M\left(\sum_{j=0}^{N(t)} \alpha_j \,\middle|\, N(t) = n \right) = M\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \,\middle|\, N(t) = n \right) =$$
$$= M \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} M\alpha_j = an, \tag{2.22}$$

где при переходе от условного математического ожидания к безусловному (при переходе на вторую строку формулы) мы воспользовались независимостью случайных величин $N(t)$ и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$. Также мы учли, что $M\alpha_j = a$ при $j > 0$ и $M\alpha_0 = 0$. Таким образом,

$$M\xi(t) = a \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, e^{-\lambda t} = a\lambda t. \tag{2.23}$$

Здесь при вычислении суммы мы использовали тот факт, что она определяет математическое ожидание случайной величины, распределённой по Пуассону с параметром λt.

Для расчёта ковариационной функции мы воспользуемся аналогичным приёмом, но теперь полная группа событий будет связана с возможными значениями двух различных сечений случайного процесса. Кроме того, следует учесть, что приращение $N(t+s) - N(s)$ при $t, s > 0$ распределено по Пуассону и принимает неотрицательные целые значения, следовательно, $N(t+s) \geqslant N(t)$ с вероятностью единица. В соответствии с этим выберем полную группу событий как

$$N(s) = m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad N(t+s) = n + m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

При этом в силу независимости приращений процесса $N(t)$, $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
P(N(s)=m,\, N(t+s)=n+m) &= P(N(s)-N(0)=m,\, N(t+s)-N(s)=n) = \\
&= P(N(s)-N(0)=m)\cdot P(N(t+s)-N(s)=n) = \\
&= \frac{(\lambda s)^m}{m!}\, e^{-\lambda s}\cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t} = P_s(m)P_t(n),
\end{aligned}$$

в правой части для краткости мы ввели обозначения для пуассоновых вероятностей

$$\begin{gathered}
P_s(m) = P(N(s)=m) = \frac{(\lambda s)^m}{m!}\, e^{-\lambda s},\\
P_t(n) = P(N(t)=n) = P(N(t+s)-N(s)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}.
\end{gathered}$$

Итак, имеем по аналогии с (2.22)

$$\begin{aligned}
&M\xi(s)\xi(t+s) = \\
&\quad= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\sum_{j=0}^{N(s)}\alpha_j \sum_{k=0}^{N(t+s)}\alpha_k \,\middle|\, N(s)=m,\, N(t+s)=n+m\right)\times\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times P(N(s)=m,\, N(t+s)=n+m) = \\
&\quad= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M\sum_{j=0}^{m}\alpha_j \sum_{k=0}^{n+m}\alpha_k\cdot P_s(m)P_t(n) = \\
&\quad= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_s(m)P_t(n)\cdot \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k.
\end{aligned}$$

Теперь найдём $M\alpha_j\alpha_k$. Очевидно,

$$M\alpha_j\alpha_k = \begin{cases} M\alpha_j\cdot M\alpha_k, & j\neq k,\\ M\alpha_k^2, & j=k,\end{cases}$$

и (поскольку неслучайная величина $\alpha_0 = 0$ независима с остальными α_k)

$$M\alpha_j\cdot M\alpha_k = \begin{cases} a^2, & k\neq j, \quad k,j>0,\\ 0, & k\neq j, \quad k\cdot j = 0,\end{cases} \qquad M\alpha_k^2 = \begin{cases} a^2+d^2, & k>0,\\ 0, & k=0.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+m}(a^2+\delta_{jk}d^2) = \\
&= a^2\cdot m(m+n) + d^2\cdot m = a^2m^2 + a^2mn + d^2m. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Теперь подставляем полученные выражения в разложение по полной группе событий. Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} mP_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP_s(m)\cdot \sum_{n=0}^{\infty}P_t(n) = \lambda s,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} m^2 P_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P_s(m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} P_t(n) = \lambda s + (\lambda s)^2,$$

где, суммируя по m, мы нашли математические ожидания случайных величин $N(s)$ и $N^2(s)$, а суммируя по n, учли условие нормировки распределения случайной величины $N(t+s) - N(t)$. Наконец,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} mnP_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP_s(m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} nP_t(n) = \lambda s\cdot\lambda t.$$

Собираем все полученные результаты (см. правую часть равенства (2.24)):

$$M\xi(s)\xi(t+s) = a^2\big(\lambda s + (\lambda s)^2\big) + a^2\lambda s\cdot\lambda t + d^2\lambda s.$$

Отсюда, принимая во внимание уже найденное математическое ожидание (2.23), получаем

$$\begin{aligned} R(s, t+s) &= M\xi(s)\xi(t+s) - M\xi(s)\cdot M\xi(t+s) = \\ &= a^2\big(\lambda s + (\lambda s)^2\big) + a^2\lambda s\cdot\lambda t + d^2\lambda s - a\lambda s\cdot a\lambda(t+s). \end{aligned}$$

Приведём подобные слагаемые: $R(s, t+s) = \lambda s(a^2 + d^2)$. Видно, что значение ковариационной функции определяется значением меньшего из её аргументов, как это бывает у процессов с независимыми приращениями.

В заключение рассмотрим процесс, в некотором роде обратный к процессу Пуассона. Пусть в составе некоторой системы имеется устройство, которое работает в течение случайного времени τ, после чего отказывает. Непосредственно после отказа устройство мгновенно заменяют на аналогичное. Таким образом, время работы системы до n-го отказа есть случайная величина

$$S_n = \tau_1 + \dots + \tau_n, \tag{2.25}$$

где τ_k – время работы k-го устройства. Мы будем считать, что случайные величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ независимы при любом n и одинаково распределены. Определим случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, формулой

$$\xi(t) = \max\{n \,|\, \tau_1 + \dots + \tau_n < t\}, \qquad t > 0, \tag{2.26}$$

таким образом, $\xi(t)$ – количество отказов, случившихся вплоть до момента времени t (на промежутке $[0, t)$). Процесс $\xi(t)$ называется *процессом восстановления.*

3. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Далее мы рассмотрим один из самых важных в теории случайных процессов – процесс Винера. Однако сначала рассмотрим дискретное приближение для процесса Винера – случайные блуждания по вещественной прямой.

Пусть точечная частицу в моменты времени $t = 0, 1, \dots$ прыгает вправо на расстояние единица с вероятностью p или влево с вероятностью q, $p + q = 1$. Вероятности скачков не зависят от положения частицы и предыстории её движения. Назовём такую модель (простейшими) случайными блужданиями. Обозначим как ξ_n координату частицы непосредственно после n-го прыжка, т. е. в момент времени $n = 1, 2 \dots$. Пусть ξ_0 – её координата в начальный момент времени. Начальное положение частицы будем считать фиксированным, $P(\xi_0 = m_0) = 1$. Тогда, очевидно,

$$P(\xi_0 = m_0, \xi_1 = m_1, \dots, \xi_n = m_n) = P(\xi_n = m_n, \dots, \xi_1 = m_1 \,|\, \xi_0 = m_0),$$

и далее мы будем пользоваться обеими формами представления этой вероятности. По сути мы получили случайный процесс ξ_s, $s = 0, 1, 2, \dots$, с дискретным временем.

Пусть целое число d равно смещению частицы за n шагов. Смещение однозначно связано с числом k прыжков вправо формулой $d = 1 \cdot k + (-1) \cdot (n - k) = 2k - n$. Вероятность того, что среди n прыжков будет ровно k прыжков вправо (или, что то же самое, $n - k$ прыжков влево) задаётся как биномиальная вероятность. Таким образом, получаем распределение случайной величины ξ_n при условии, что $\xi_0 = m$:

$$P(\xi_n = m_0 + d \,|\, \xi_0 = m_0) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = \frac{n+d}{2}, \quad d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1}$$

при этом обязательно $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Если это условие не выполнено, вероятность равна нулю. Такое ограничение, во-первых, означает что целые числа n и d обязательно должны иметь одну чётность (быть оба либо чётными, либо нечётными). Во-вторых, это условие влечёт $|d| < n$, что, впрочем, очевидно: за n прыжков длины 1 нельзя уйти от начальной точки дальше, чем на n. Заметим, что вероятность (3.1) не зависит от начального положения m_0 частицы и полностью определяется (при заданной p) числом шагов n и смещением d. Далее в этом разделе договоримся считать, что $C_n^k = 0$, если $k \notin \{0, 1, \dots, n\}$.

Траектория процесса ξ_n, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Сопоставим движению частицы за n шагов множество точек (s, ξ_s), $s = 0, 1, \dots, n$, на плоскости переменных (t, x). Для наглядности соединим эти точки отрезками прямых, получится непрерывная ломаная $\mathcal{L}_n(m_0, m_n)$ из n звеньев, начинающаяся из точки $(0, m_0)$ и заканчивающаяся в точке (n, m_n), которую можно рассматривать как траекторию процесса ξ_s, $s = 0, 1, \dots, n$, с дискретным временем. Для любой реализации $\xi_0 = m_0, \xi_1 = m_1, \dots, \xi_n = m_n$ случайного блуждания s-е звено ломаной начинается в точке (s, m_{s-1}) и заканчивается в точке (s, m_s), где $m_s = m_{s-1} + 1$ (и тогда мы говорим, что звено направлено вверх) или $m_s = m_{s-1} - 1$ (тогда звено направлено вниз). Количество звеньев ломаной мы далее называем её длиной.

Вероятность того, что частица пройдёт по заданной траектории в силу независимости прыжков равна

$$P(\xi_0 = m_0, \xi_1 = m_1, \dots, \xi_n = m_n) = p^k q^{n-k},$$

где k – количество звеньев, направленных вверх, $n - k$ равно количеству звеньев, направленных вниз. Как мы уже отмечали, число k полностью определяется количеством прыжков n и смещением $d = m_n - m_0$. Поэтому для любой траектории, ведущей из точки $(0, m_0)$ в точку (n, m_n), вероятность прохода именно по этой траектории одна и та же: она равна $p^k q^{n-k}$, где $k = \frac{n+d}{2}$, $n - k = \frac{n-d}{2}$, $d = m_n - m_0$. При этом у нас существуют C_n^k траекторий из $(0, m_0)$ в (n, m_n). Это даёт нам формулу (3.1) для вероятности прохода из $(0, m_0)$ в (n, m_n) по <u>любой</u> из возможных траекторий.

Заметим, что начальная и конечная точка траектории при заданном общем количестве прыжков однозначно фиксируют количество прыжков вправо, следовательно, вероятность любого перемещения при фиксированных начальной и конечной точках будет содержать множитель $p^k q^{n-k}$. Различные условия, ограничивающие произвольность перемещения, влияют только на количество разрешённых траекторий, т. е. на множитель перед $p^k q^{n-k}$.

Вероятность прохода через промежуточную точку. Предположим, что наряду с начальной и конечной фиксирована некоторая промежуточная точка блужданий: $\xi_u = m_u$, натуральное $u < n$ и m_u фиксировано. Тогда согласно нашему замечанию при фиксированных конечной и начальной точках траектории имеем

$$P(\xi_n = m_n, \xi_u = m_u, \xi_0 = m_0) = N' \cdot p^k q^{n-k}, \quad k = \tfrac{n+m_n-m_0}{2}, \quad n-k = \tfrac{n-(m_n-m_0)}{2},$$

где N' – количество траекторий из точки $(0, m_0)$ в точку (n, m_n), проходящих через точку (u, m_u). Это количество равно $N' = N_1 \cdot N_2$, где N_1 – количество траекторий из $(0, m_0)$ в точку (u, m_u), N_2 – количество траекторий из (u, m_u) в точку (n, m_n),

$$N_1 = C_u^{k_1}, \quad k_1 = \frac{u + m_u - m_0}{2}, \qquad N_2 = C_{n-u}^{k_2}, \quad k_2 = \frac{n - u + m_n - m_u}{2}.$$

Мы видим, что $k = k_1 + k_2$, $n - k = (u - k_1) + (n - u - k_2)$. Поэтому

$$P(\xi_n = m_n, \xi_u = m_u, \xi_0 = m_0) = C_u^{k_1} p^{k_1} q^{u-k_1} \cdot C_{n-u}^{k_2} p^{k_2} q^{n-u-k_2}.$$

Мы получили, что если блуждание можно разбить на части некоторыми промежуточными фиксированными точками, то блуждания на отдельных временны́х отрезках независимы. Если обозначить вероятность прохода из точки с координатой a в точку с координатой b за n шагов как $P_n(a, b)$, то мы получаем достаточно очевидное свойство:

$$P_{n_1+n_2}(a, b) = P_{n_1}(a, c) \cdot P_{n_2}(c, b)$$

для любой промежуточной точки c, в которой частица может находиться в момент времени $t = n_1$.

Вероятность прохода без попадания в ноль. Для некоторых задач бывает важно найти вероятность того, что частица, стартовав из точки $m > 0$, за n шагов пришла в точку $m + d > 0$ и при этом ни разу не попала в точку с координатой $x = 0$:

$$P_n^+(m, m+d) = P(\xi_n = m + d, \xi_{n-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = m). \tag{3.2}$$

Другими словами, мы ищем вероятность того, что траектория $\mathcal{L}_n(m, m+d)$ целиком лежит выше горизонтальной оси. Как мы уже отмечали, вероятность прохода по любой траектории $\mathcal{L}_n(m, m+d)$ равна $p^k q^{n-k}$, где $k = (n+d)/2$, поэтому вероятность (3.2) равна

$$P_n^+(m, m+d) = N_n^+(m, m+d) \cdot p^k q^{n-k} = (C_n^k - \overline{N}_n(m, m+d)) \cdot p^k q^{n-k}, \tag{3.3}$$

где $N_n^+(m, m+d)$ – число траекторий из m в $m + d$ длины n, не пересекающих горизонтальную ось $x = 0$ и не касающихся этой оси, C_n^k – полное число траекторий

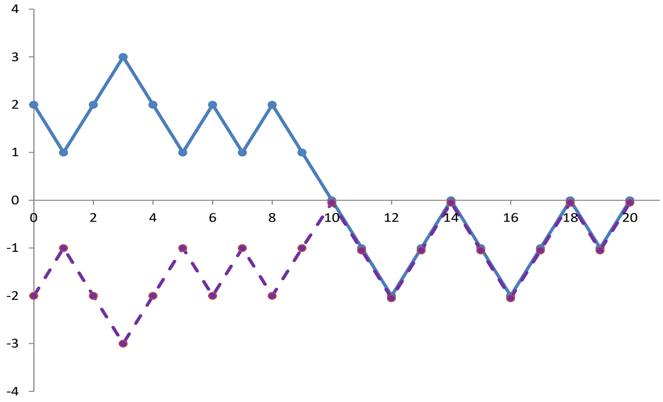

Рис. 1. Принцип отражения.

из m в $m+d$ длины n, а $\overline{N}_n(m, m+d)$ – число траекторий из m в $m+d$ длины n, хотя бы один раз проходящих через точку с $x = 0$.

Найдём $\overline{N}_n(m, m+d)$. Чему равно $\overline{N}_n(m, m+d)$, мы получим с помощью так называемого *принципа отражения*.

Утверждение 3.1. *Пусть $m_0 > 0$ и $m_0 + d > 0$. Для прохода за n шагов из точки $x = m_0$ в точку $x = m_0 + d$ с заходом в ноль количество благоприятных траекторий равно*

$$\overline{N}_n(m, m+d) = C_n^{\bar{k}}, \quad \text{где} \quad \bar{k} = \frac{n+2m+d}{2} = k + m \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{3.4}$$

Если $\bar{k} \notin \{0, 1, \ldots, n\}$, то $\overline{N}_n(m, m+d) = 0$, другими словами, проход из точки m в точку $m+d$ с заходом в ноль невозможен.

Доказательство. Возьмём любую траекторию $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, которая начинается в точке $(0, m)$, заканчивается в точке $(n, m+d)$ и хотя бы один раз пересекает ось t или касается её.

Введем k_* – <u>минимальный</u> номер шага, для которого $\xi_{k_*} = 0$, т. е. k_* – момент первого пересечения или касания траекторией $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ оси $x = 0$. Сопоставим траектории $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ траекторию $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$, идущую из точки $(0, -m)$ в точку $(n, m+d)$ по следующему правилу. Часть траектории $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$, лежащая левее точки $(k_*, 0)$, получена симметричным отражением такой же части траектории $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ относительно оси t (заметим, что в моменты времени $t < k_*$ часть траектории $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ лежит строго выше оси, следовательно, часть траектории $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$ лежит строго ниже оси), а в последующих точках обе траектории совпадают (см. рис. 1).

Любое блуждание, начинающееся в точке $-m < 0$ и заканчивающееся в точке $m + d > 0$, с необходимостью пройдет через точку 0 (начав левее нуля и закончив правее нуля, частица проходит все промежуточные целочисленные точки, так как прыжки имеют длину 1). Рассмотрим какую-либо траекторию $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$, отвечающую этому блужданию. Как и выше, обозначим через k_* минимальный номер шага, для которого $\xi_{k_*} = 0$ (момент первого пересечения или касания оси), и отразим симметрично относительно оси t часть этой траектории, лежащую левее точки $(k_*, 0)$, а при $t \geqslant k_*$ продолжим двигаться по траектории $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$. В результате получим траекторию $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, которая также проходит через точку $(k_*, 0)$, т. е. пересекает ось t или касается ее.

Таким образом, блуждание из m в $m+d$, проходящее через ноль, и любое блуждание из точки $-m$ в точку $m+d$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Количество траекторий вида $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$ равно $C_n^{\bar{k}}$, где $\bar{k} = (n + 2m + d)/2$, поскольку в данном случае смещение частицы равно $\overline{d} = 2m + d$. В силу взаимно однозначного соответствия количество траекторий вида $\bar{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$ совпадает с количеством траекторий вида $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, т. е.

$$\overline{N}_n(m, m+d) = C_n^{\bar{k}}.$$

Формула (3.4) доказана.

Подставим полученный результат в (3.3). Итак, для $m > 0$ и $m + d > 0$ имеем

$$P_n^+(m, m+d) = (C_n^k - C_n^{\bar{k}})p^k q^{n-k}, \qquad k = \frac{n+d}{2}, \quad \bar{k} = \frac{n+2m+d}{2} = k + m. \tag{3.5}$$

Как и в формуле (3.1), числа $k = (n+d)/2$ и $\bar{k} = (n + 2m + d)/2$ должны принадлежать множеству $\{0, 1, \ldots, n\}$, иначе соответствующий биномиальный коэффициент по нашей договорённости равен нулю.

Первое возвращение в исходную точку. Будем считать, что частица начинает движение из точки $m = 0$. Обозначим через R_{2r} событие, заключающееся в том, что частица в первый раз вернулась в начальную точку в момент $t = 2r > 0$ (для возврата в исходную точку, очевидно, требуется чётное число шагов). Найдём

$$P(R_{2r}) = P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Если $\xi_0 = 0$, то либо $\xi_1 = 1$, либо $\xi_1 = -1$. В соответствии с этим представим R_{2r} в виде $R_{2r} = R_{2r}^+ + R_{2r}^-$ (как обычно в теории вероятностей сумма – это объединение несовместных событий), при этом отвечающая событию R_{2r}^+ траектория $\mathcal{L}_{2r}^+(0, 0)$ лежит строго выше оси t всюду, кроме точек $(0, 0)$ и $(2r, 0)$. Поскольку частица совершает только прыжки длины 1, это возможно, только если при $t = 1$ и $t = 2r - 1$ частица находилась в точке с координатой $x = 1$, и мы имеем

$$P(R_{2r}^+) = P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Пусть сначала $r = 1$. Событие $R_2^\pm$ означает, что частица за два шага вернулась в исходную точку, т. е. совершила два прыжка в разные стороны, поэтому мы имеем $P(R_2^\pm) = pq$ и $P(R_{2r}) = 2pq$.

При $r > 1$ мы можем записать следующее равенство для перехода

$$0 \xrightarrow[1]{} 1 \xrightarrow[2r-2]{} 1 \xrightarrow[1]{} 0,$$

где числа на строке означают координаты точек, а числа под стрелочками – количество шагов, за которые совершается указанный переход:

$$P(R_{2r}^+) = p \cdot P_{2r-2}^+(1,1) \cdot q = p \cdot (C_{2r-2}^{r-1} - C_{2r-2}^r) p^{r-1} q^{r-1} \cdot q.$$

Здесь мы учли независимость блужданий на отдельных участках траектории и тот факт, что переход из 1 в 1 происходит без захода в ноль, поэтому мы можем воспользоваться формулой (3.5) при $m = m + d = 1$, $n = 2r - 2$ для подсчёта вероятности $P_{2r-2}^+(1,1)$.

Сделаем тривиальные преобразования:

$$C_{2r-2}^{r-1} - C_{2r-2}^r = \frac{(2r-2)!}{(r-1)!(r-1)!}\left(1 - \frac{r-1}{r}\right) = \frac{(2r-2)!}{(r-1)!(r-1)!r} =$$
$$= \frac{(2r-2)!(2r-1)2r}{(r-1)!(r-1)!r(2r-1)2r} = \frac{1}{2}\frac{(2r)!}{r!r!(2r-1)} = \frac{1}{2}\frac{C_{2r}^r}{2r-1}.$$

Тогда

$$P(R_{2r}^+) = \frac{1}{2}\frac{C_{2r}^r}{2r-1}(pq)^r.$$

Вероятность $P(R_{2r}^-)$ блуждания из точки $m = 0$ в точку $m_{2r} = 0$ с дополнительным ограничением $m_1 = -1$, $m_2 < 0, \ldots, m_{2r-2} < 0$, $m_{2r-1} = -1$ получается из $P(R_{2r}^-)$ взаимной заменой p на q, поэтому $P(R_{2r}^-) = P(R_{2r}^+)$ для $r > 1$. С учётом $P(R_{2r}) = 2pq$ окончательно получаем

$$P(R_{2r}) = P(R_{2r}^-) + P(R_{2r}^+) = \frac{C_{2r}^r}{2r-1}(pq)^r, \qquad r = 1, 2, \ldots . \tag{3.6}$$

Рассмотрим событие R, которое заключается в том, что частица когда-либо вернется в исходную точку. Имеем

$$P(R) = P\left(\sum_{r=1}^{\infty} R_{2r}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} P(R_{2r}) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_{2r}^r}{2r-1}(pq)^r.$$

Для любых $p, q \geqslant 0$ при $p + q = 1$ получаем оценку $0 \leqslant pq \leqslant 1/4$. Степенной ряд при этом сходится,

$$P(R) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_{2r}^r}{2r-1}(pq)^r = 1 - \sqrt{1 - 4pq}.$$

В случае $p = q = 1/2$ получаем $P(R) = 1$, и частица всегда (с вероятностью единица) возвращается в исходную точку. Если $p \neq q$, то $P(R) < 1$, в предельном случае $p = 0$ или $q = 0$ вероятность возврата равна нулю, что, впрочем, является очевидным фактом, поскольку в этом случае частица совершает детерминированное движение в одном направлении.

3.1. Общий случай возвращений в исходную точку. Пусть V_{2n} – событие, заключающееся в том, что частица в момент времени $t = 2n$ оказалась в начальной точке, при этом неважно, была ли она в этой точке ранее или нет. При $n = 1, 2, \ldots$ в соответствии с (3.1)

$$P(V_{2n}) = P_{2n}(0,0) = C_{2n}^n (pq)^n, \tag{3.7}$$

поскольку событие V_{2n} происходит тогда и только тогда, когда частица за $2n$ шагов сместилась на расстояние $d = 0$.

Выведем ещё одну полезную формулу. Представим событие V_{2n} в виде разложения в сумму по моментам первого попадания частицы в точку ноль:

$$V_{2n} = \sum_{r=1}^{n-1} \widetilde{R}_{2r,2n} + R_{2n},$$

где $\widetilde{R}_{2r,2n}$ означает, что при $2n$ шагах блуждания первое возвращение в ноль произошло в момент времени $2r < 2n$, далее частица двигалась произвольным образом (возможно, вновь возвращаясь в ноль) и при $t = 2n$ опять же оказалась в нуле. Найдём

$$P(\widetilde{R}_{2r,2n}) = P(\xi_{2n} = 0, \xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0, \,|\, \xi_0 = 0).$$

Заметим, что в силу независимости блужданий до $2r$-го шага и после него

$$P(\widetilde{R}_{2r,2n}) = P(R_{2r}) \cdot P_{2n-2r}(0,0) = P(R_{2r})P(V_{2n-2r}). \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$P(V_{2n}) = \sum_{r=1}^{n-1} P(V_{2n-2r})P(R_{2r}) + R_{2n} = \sum_{r=1}^{n} P(V_{2n-2r})P(R_{2r}), \tag{3.9}$$

где мы учли, что $P(V_0) = P(\xi_0 = 0) = 1$.

Последние возвращения. Найдем вероятность того, что, стартовав из точки $m = 0$, частица в моменты времени $t = 2, 4, \ldots, 2n$ не вернется в начало координат. Обозначим указанное событие через B_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$. Учитывая результат первого шага, запишем

$$\begin{aligned}
&P(B_{2n}) = P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_2 \neq 0, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0) = P(B_{2n}^+) + P(B_{2n}^-),\\
&P(B_{2n}^+) = P(\xi_{2n} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0),\\
&P(B_{2n}^+) = P(\xi_{2n} < 0, \ldots, \xi_2 < 0, \xi_1 = -1 \,|\, \xi_0 = 0).
\end{aligned}$$

Разложим событие B_{2n}^+ по полной группе событий, отвечающих возможным положениям частицы на $(2n)$-м шаге. Очевидно, что за $2n$ шагов частица смещается на расстояние $1 \cdot k + (-1) \cdot (2n - k) = 2k - 2n$, где $k = 0, \ldots, 2n$ – число шагов вправо, т. е. смещение является чётным числом. Кроме того, с необходимостью $\xi_{2n} \leqslant 2n$ и по условию (в рамках события B_{2n}^+) мы имеем $\xi_{2n} > 0$, поэтому $\xi_{2n} = 2m$, $m = 1, \ldots, n$. Получаем

$$\begin{aligned}
P(B_{2n}^+) &= \sum_{m=1}^{n} P(\xi_{2n} = 2m, \xi_{2n-1} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0) =\\
&= \sum_{m=1}^{n} P_{2n-1}^+(1, 2m) \cdot p
\end{aligned} \tag{3.10}$$

и

$$P_{2n-1}^+(1, 2m) = (C_{2n-1}^{n+m-1} - C_{2n-1}^{n+m})p^{n+m-1}q^{n-m}, \qquad m = 1, \ldots, n-1.$$

При $m = n$ существует ровно один путь из точки $(1, 1)$ в точку $(2n, 2n)$, и он не проходит через ноль (все прыжки совершаются вправо). Таким образом, в данном случае $P^+_{2n-1}(1, 2n) = p^{2n-1}$, и мы можем записать по аналогии с предыдущим равенством

$$P^+_{2n-1}(1, 2m)\big|_{m=n} = C^{n+m-1}_{2n-1} p^{n+m-1} q^{n-m}.$$

Подставим полученные выражения в (3.10):

$$\begin{aligned} P(B^+_{2n}) &= \sum_{m=1}^{n} C^{n+m-1}_{2n-1} p^{n+m} q^{n-m} - \sum_{m=1}^{n-1} C^{n+m}_{2n-1} p^{n+m} q^{n-m} = \\ &= \sum_{m=1}^{n} C^{n-m}_{2n-1} p^{n+m} q^{n-m} - \sum_{m=1}^{n} C^{n-m}_{2n-1} p^{n+m-1} q^{n-m+1} + C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n, \end{aligned}$$

где мы произвели во второй сумме сдвиг индекса $m \mapsto m + 1$ (при этом суммирование происходит по $m = 2, \ldots, n$), добавили и вычли одно слагаемое с $m = 1$, и использовали равенство $C^{n+m-1}_{2n-1} = C^{n-m}_{2n-1}$.

В результате получаем

$$P(B^+_{2n}) = \sum_{m=1}^{n} C^{n-m}_{2n-1} p^{n+m} q^{n-m} \left(1 - \frac{q}{p}\right) + C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n. \tag{3.11}$$

Вероятность $P(B^-_{2n})$ получается из $P(B^+_{2n})$ взаимной заменой p на q:

$$P(B^-_{2n}) = \sum_{m=1}^{n} C^{n-m}_{2n-1} p^{n-m} q^{n+m} \left(1 - \frac{p}{q}\right) + C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n. \tag{3.12}$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить для **симметричных блужданий**, т.е. для случая $p = q = 1/2$. Тогда в выражениях (3.11) и (3.12) останется только одно слагаемое (вне суммы), и мы получаем при $p = q = 1/2$

$$\begin{aligned} P(B_{2n}) &= P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_2 \neq 0, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\ &= 2C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n = \frac{2n(2n-1)!}{n(n-1)!(n-1)!} (pq)^n = C^n_{2n} (pq)^n = \frac{C^n_{2n}}{4^n}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Введем случайную величину α_{2n}, равную номеру шага, при котором произошло <u>последнее</u> возвращение в начальную точку при $2n$ шагах блуждания. Выпишем распределение случайной величины α_{2n}:

$$\begin{aligned} P(\alpha_{2n} = 2s) &= P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_{2s+1} \neq 0, \xi_{2s} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\ &= P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_{2s+1} \neq 0 \,|\, \xi_{2s} = 0) P(\xi_{2s} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\ &= P(B_{2n-2s}) P(V_{2s}), \qquad s = 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

или, в явном виде, с учётом (3.7) и (3.13) при $p = q = 1/2$

$$P(\alpha_{2n} = 2s) = C^{n-s}_{2n-2s} (pq)^{n-s} \cdot C^s_{2s} (pq)^s = \frac{C^s_{2s} C^{n-s}_{2n-2s}}{4^n}, \qquad s = 1, \ldots, n-1. \tag{3.14}$$

При $s = 0$ событие $\alpha_{2n} = 0$ равносильно тому, что частица за $2n$ шагов ни разу не вернулась в исходную точку, т. е. событию B_{2n}. Формула (3.14) при этом приобретает вид $P(\alpha_{2n} = 0) = P(B_{2n}) = C_{2n}^n/4^n$ в соответствии с (3.13). При $s = n$ событие $P(\alpha_{2n} = 2n)$ рассчитывается по формуле

$$P(\alpha_{2n} = 2n) = P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = P(V_{2n}) = \frac{C_{2n}^n}{4^n}.$$

Таким образом, с учётом равенства $C_0^0 = 1$ формулу (3.14) можно распространить на все допустимые значения s:

$$P(\alpha_{2n} = 2s) = C_{2n-2s}^{n-s}(pq)^{n-s} \cdot C_{2s}^s(pq)^s = \frac{C_{2s}^s C_{2n-2s}^{n-s}}{4^n}, \qquad s = 0, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Легко видеть, что $P(\alpha_{2n} = 2s) = P(\alpha_{2n} = 2n - 2s)$. Другими словами, для последнего возврата в начало вероятность на раннем шаге с номером $2s$ такая же, как аналогичная вероятность на соответствующем шаге $2n - 2s$, близком к концу. При больших n можно применить формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ и записать приближённую формулу для (3.15) в случае больших n, s, $n - s$:

$$P(\alpha_{2n} = 2s) \approx \frac{\sqrt{2\pi 2s}(2s)^{2s}e^{-2s}\sqrt{2\pi(2n-2s)}(2n-2s)^{2n-2s}e^{-(2n-2s)}}{\left(\sqrt{2\pi s}(s)^s e^{-s}\right)^2\left(\sqrt{2\pi(n-s)}(n-s)^{n-s}e^{-(n-s)}\right)^2 4^s} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{s(n-s)}} = \frac{1}{\pi n}\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}, \qquad z = \frac{s}{n}, \quad 0 < z < 1.$$

В последнем выражении симметрия $s \leftrightarrow n - s$, которой соответствует $z \leftrightarrow 1 - z$, становится ещё более явной. При $z \gtrsim 0$ или $z \lesssim 1$ мала величина s или $n - s$ соответственно, поэтому асимптотика работает плохо. Тем не менее из последней формулы можно увидеть, что момент последнего возвращения частицы в ноль будет с большей вероятностью принимать малые или большие, чем средние значения (минимум вероятности находится в точке $z = 1/2$, что отвечает $s = n/2$). Удивительно, что малые и большие значения времени последнего возвращения равновероятны.

Сравнивая (3.15) с формулой (3.7) при $p = q = 1/2$, видим, что

$$P(\alpha_{2n} = 2s) = P(V_{2s})P(V_{2n-2s}), \qquad s = 0, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Распределение времени пребывания на одной стороне. Для симметричных блужданий введем случайную величину β_{2n}, которая равна $2k$, если из $2n$ звеньев ломаной $\mathcal{L}_{2n}(0, m_{2n})$ ровно $2k$ звеньев лежат не ниже оси t и, соответственно, ровно $2n - 2k$ звеньев лежат не выше оси t. Найдем распределение случайной величины β_{2n}.

Прежде всего рассмотрим случай $\beta_{2n} = 2n$, когда вся траектория находится в верхней полуплоскости и найдем

$$P(\beta_{2n} = 2n) = P(\xi_{2n} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Как и выше, разложим эту вероятность по возможным положениям частицы на $(2n)$-м шаге (мы уже отмечали, что если число шагов чётно, то и смещение – чётное число, при условии неотрицательности реализаций лежащее в пределах от 0 до $2n$):

$$P(\beta_{2n} = 2n) = \sum_{m=0}^{n} P(\xi_{2n} = 2m, \xi_{2n-1} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Очевидно, что при $m < n$

$$\begin{aligned}
P(\xi_{2n} = 2m, \xi_{2n-1} \geqslant 0, \dots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
= P(\xi_{2n} + 1 = 2m + 1, \xi_{2n-1} + 1 \geqslant 1, \dots, \xi_1 + 1 \geqslant 1 \,|\, \xi_0 + 1 = 1) = \\
= P(\tilde{\xi}_{2n} = 2m + 1, \tilde{\xi}_{2n-1} > 0, \dots, \tilde{\xi}_1 > 0 \,|\, \tilde{\xi}_0 = 1)).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь мы ввели случайный процесс $\tilde{\xi}_j = \xi_j + 1$, $j = 1, 2 \dots$. Он имеет те же вероятностные свойства, что случайный процесс ξ_j, $j = 1, 2 \dots$, но стартует из точки 1. Вероятность в правой части равенства (3.17) есть вероятность прохода по любой траектории, начинающейся в точке $(0, 1)$, заканчивающейся в точке $(2n, 2m + 1)$ и целиком лежащей выше оси t. Таким образом,

$$\begin{aligned}
P(\xi_{2n} = 2m, \xi_{2n-1} \geqslant 0, \dots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
= P^{+}_{2n}(1, 2m + 1) = (C^{n+m}_{2n} - C^{n+m+1}_{2n}) p^{n+m} q^{n+m}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

При $m = n$ мы имеем $P(\xi_0 = 0, \xi_1 \geqslant 0, \dots, \xi_{2n} = 2m) = p^{2n}$, потому что достичь точки $m = 2n$ за $2n$ шагов можно, только когда все скачки совершаются вправо. Мы можем считать, что в случае $m = n$ в правой части равенства (3.18) от выражения в скобках остаётся только первое слагаемое.

Подставим эти выражения в сумму и учтем, что $p = q = 1/2$, получим

$$4^n \cdot P(\beta_{2n} = 2n) = \sum_{m=0}^{n} C^{n+m}_{2n} - \sum_{m=0}^{n-1} C^{n+m+1}_{2n} = \sum_{m=0}^{n} C^{n+m}_{2n} - \sum_{m=1}^{n} C^{n+m}_{2n} = C^{n}_{2n}$$

или, сравнивая с (3.14),

$$P(\beta_{2n} = 2n) = P(\alpha_{2n} = 2n) = \frac{C^n_{2n}}{4^n}.$$

Легко показать, что аналогичное утверждение имеет место и при $m = 0$:

$$P(\beta_{2n} = 0) = P(\alpha_{2n} = 0) = \frac{C^n_{2n}}{4^n}. \tag{3.19}$$

Покажем, что распределения случайных величин α_{2n}, β_{2n} полностью совпадают:

$$P(\beta_{2n} = 2m) = P(\alpha_{2n} = 2m), \qquad m = 0, 1, \dots, n. \tag{3.20}$$

Найдем вероятность того, что $\beta_{2n} = 2m$ при $0 < m < n$. В этом случае в траектории блуждания присутствуют звенья, лежащие как снизу, так и сверху от оси t. Следовательно, хотя бы один раз частица вернулась в точку ноль. Пусть $2r$ – номер первого возвращения, т. е. произошло событие R_{2r}. Напишем формальное разложение по полной группе событий $\{R_{2r}\}_{r=\overline{1,n}}$:

$$\begin{aligned}
P(\beta_{2n} = 2m) = \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2m\} \cap R_{2r}\big) = \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2m)\} \cap (R^{+}_{2r} + R^{-}_{2r})\big) = \\
= \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2m)\} \cap (R^{+}_{2r}\big) + \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2m)\} \cap R^{-}_{2r})\big)
\end{aligned}$$

(в последнем выражении мы использовали формулу (3.6)). Если произошли оба события $\beta_{2n} = 2m$ и R^+_{2r}, то, с одной стороны, ровно $2m$ звеньев лежат не ниже оси t; с другой стороны, $2r$ первых звеньев заведомо лежат в верхней полуплоскости. Поэтому, если $r > m$, события $\beta_{2n} = 2m$ и R^+_{2r} несовместны. Аналогично, если произошли события $\beta_{2n} = 2m$ и R^-_{2r}, то в траектории имеются ровно $2n-2m$ звеньев в нижней полуплоскости и в то же время заведомо присутствуют $2r$ таких звеньев. Отсюда, если $r > n - m$, события $\beta_{2n} = 2m$ и R^-_{2r} несовместны. Итак,

$$P(\beta_{2n} = 2m) = \sum_{r=1}^{m} P\big(\{\beta_{2n} = 2m\} \cap R^+_{2r}\big) + \sum_{r=1}^{n-m} P\big(\{\beta_{2n} = 2m\} \cap R^-_{2r}\big).$$

Рассмотрим каждое слагаемое в суммах по отдельности. Если первое возвращение произошло в момент времени $t = 2r$, т. е. произошло событие R^+_{2r}, то первые $2r$ звеньев траектории лежат в верхней полуплоскости. Если при этом $\beta_{2n} = 2m$, то во всей ломаной в верхней полуплоскости лежат $2m$ звеньев. Таким образом для $t = 2r+1, \ldots, 2n$ в траектории $\mathcal{L}_{2n-2r}(0, m_{2n})$, отвечающей движению частицы после первого возвращения в ноль, ровно $2m-2r$ звеньев лежат в верхней полуплоскости. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&P\big(\{\beta_{2n} = 2m)\} \cap R^+_{2r}\big) = \\
&= \sum_{\{m_j\}} P(\xi_{2n} = m_{2n}, \ldots, \xi_{2r+1} = m_{2r+1}, \xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} > 0, \ldots, \xi_1 > 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
&= \sum_{\{m_j\}} P(R^+_{2r}) P_{2n-2r}(0, m_{2n}),
\end{aligned}$$

где суммирование ведётся по всем наборам положений $m_{2n}, \ldots, m_{2r+1}$ частицы в моменты времени $t = 2r+1, \ldots, 2n$, удовлетворяющим условию, что частица начала движение из точки ноль, а далее ровно $2m-2r$ звеньев её траектории $\mathcal{L}_{2n-2r}(0, m_{2n})$ лежат в верхней полуплоскости. Процесс блужданий однороден во времени, поэтому второй множитель в правой части даёт в точности $P(\beta_{2n-2r} = 2m-2r)$. Первый множитель равен $P(R^+_{2r}) = P(R_{2r})/2$, поскольку мы рассматриваем симметричные блуждания.

Аналогично

$$P\big(\{\beta_{2n} = 2m)\} \cap R^-_{2r}\big) = P(R^-_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2m) = \frac{P(R_{2r})}{2} P(\beta_{2n-2r} = 2m).$$

Объединяя полученные формулы, имеем при $0 < m < n$

$$P(\beta_{2n} = 2m) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} P(R_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2m-2r) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-m} P(R_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2m). \tag{3.21}$$

Заметим, что (3.21) – рекуррентное соотношение для распределения β_{2n}. Поэтому для доказательства равенства (3.20) воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ с помощью непосредственного анализа блужданий из нуля при условии, что ровно $2m = 0, 2$ звеньев в траектории из двух звеньев лежат выше оси t, получаем

$$P(\beta_2 = 0) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = -2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = 0) = q^2 + qp = \frac{1}{2},$$

$$P(\beta_2 = 2) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = p^2 + qp = \frac{1}{2},$$

С другой стороны, α_2 – момент времени последнего возвращения в ноль при двух шагах блужданий, и

$$P(\alpha_2 = 0) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = -2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = q^2 + p^2 = \frac{1}{2},$$
$$P(\alpha_2 = 2)P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = 0) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = 2pq = \frac{1}{2},$$

и равенство (3.20) верно.

Сделаем индукционное предположение с учётом формулы (3.15). Пусть для всех $n' \leqslant n-1$ имеет место совпадение распределений:

$$P(\beta_{2n'} = 2m) = P(\alpha_{2n'} = 2m) = P(V_{2m})P(V_{2n'-2m}), \quad m = 0, 1, \dots, n'.$$

Напомним формулу (3.16), а именно $P(\alpha_{2n} = 2m) = P(V_{2m})P(V_{2n-2m})$. Тогда, переходя от $n-1$ к n, для $1 \leqslant m \leqslant n-1$, подставив в (3.21) индукционное предположение, получаем

$$2P(\beta_{2n} = 2m) = \sum_{r=1}^{m} P(R_{2r})P(\beta_{2n-2r} = 2m-2r) + \sum_{r=1}^{n-m} P(R_{2r})P(\beta_{2n-2r} = 2m) =$$
$$= \sum_{r=1}^{m} P(R_{2r})P(\alpha_{2n-2r} = 2m-2r) + \sum_{r=1}^{n-m} P(R_{2r})P(\alpha_{2n-2r} = 2m) =$$
$$= \sum_{r=1}^{m} P(R_{2r})P(V_{2m-2r})P(V_{2n-2r-(2m-2r)}) + \sum_{r=1}^{n-m} P(R_{2r})P(V_{2m})P(V_{2n-2r-2m}).$$

В итоге
$$2P(\beta_{2n} = 2m) = P(V_{2n-2m})P(V_{2m}) + P(V_{2m})P(V_{2n-2m}),$$
где мы учли (3.9). Вновь используя (3.16), получаем

$$2P(\beta_{2n} = 2m) = 2P(\alpha_{2n} = 2m), \qquad m = 1, \dots, n-1.$$

Для $m = 0, n$ равенство вероятностей было показано выше. Формула (3.20) доказана.

4. ПРОЦЕСС ВИНЕРА

Теперь мы перейдём к процессу Винера, который является процессом с непрерывным временем. Его математическое исследование достаточно сложное, поэтому некоторые утверждения, сформулированные ниже, мы оставим без аккуратного математического обоснования. Заметим, однако, что большинство этих утверждений достаточно очевидны с точки зрения «здравого смысла».

Определение и основные характеристики процесса Винера.

Определение 4.1. *Процесс Винера* – это случайный процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) его приращения независимы, т. е. для любых $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $w(t_k) - w(t_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, независимы в совокупности;

2) процесс однороден во времени, т. е. распределение приращения $w(t) - w(s)$ для $0 \leqslant s < t$ зависит только от $t - s$ и не зависит от s;

3) приращение $w(t) - w(s)$ является нормально распределённой случайной величиной с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2(t-s)$ (здесь σ^2 – положительная постоянная), т. е. плотность вероятности случайной величины $\Delta w(t) = w(s+t) - w(s)$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(t-s)}}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant s < t;$$

4) процесс начинается в нуле: $P(w(0) = 0) = 1$.

Непосредственно из определения вытекает, что сечение $w(t) = w(t) - w(0)$ процесса Винера распределено нормально, одномерная плотность вероятности есть

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Математическое ожидание $Mw(t) = 0$, дисперсия $Dw(t) = \sigma^2 t$, а ковариационная функция $R_w(t,s) = \sigma^2 \min(t,s)$, как это следует из общей формулы для процессов с независимыми приращениями.

Найдём n-мерную плотность вероятности. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Выразим сечения $w(t_k)$ через приращения $\Delta w_k = w(t_k) - w(t_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
w(t_1) &= w(t_1) - w(0) = \Delta w_1, \\
w(t_2) &= w(t_2) - w(t_1) + w(t_1) - w(t_0) = \Delta w_1 + \Delta w_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
w(t_n) &= w(t_n) - w(t_{n-1}) + \dots + w(t_1) - w(0) = \Delta w_1 + \dots + \Delta w_n.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Тогда n-мерную функцию распределения можно найти по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
F(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n) &\overset{\text{def}}{=\!=} P(w(t_1) < x_1, \dots, w(t_n) < x_n) = \\
&= P(\Delta w_1 < x_1, \dots, \Delta w_1 + \dots + \Delta w_n < x_n) = \\
&= \underset{\substack{z_1 < x_1,\\ \dots\dots\dots,\\ z_1 + \dots + z_n < x_n}}{\int \dots \int} p_1(z_1) \dots p_n(z_n)\, dx_1 \dots dx_n,
\end{aligned}$$

где мы учли, что случайные величины $\Delta w_1, \ldots, \Delta w_n$ независимы, и ввели для краткости обозначение $p_k(\,\cdot\,)$ для плотности распределения приращения Δw_k,

$$p_k(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k - t_{k-1})}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2(t_k - t_{k-1})}}, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Совершим в n-кратном интеграле линейную замену переменных, которая упрощает вид области интегрирования:

$$\begin{aligned} &y_1 = z_1, \quad y_2 = z_1 + z_2, \quad \ldots, \quad y_n = z_1 + \cdots + z_1, \\ &z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2 - y_1, \quad \ldots, \quad z_n = y_n - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Якобиан перехода при такой замене переменных равен единице. Введём для однообразия формул $y_0 = 0$, тогда $z_k = \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ для всех $k = 1, \ldots, n$ (наша замена в точности повторяет переход от приращений к сечениям, заданный в (4.1)). В результате получим

$$\underset{\substack{z_1 < x_1,\\ \ldots\ldots\ldots,\\ z_1 + \cdots + z_n < x_n}}{\int \cdots \int} p_1(z_1) \ldots p_n(z_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \underset{y_1 < x_1, \ldots, y_n < x_n}{\int \cdots \int} p_1(\Delta y_1) \ldots p_n(\Delta y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Возвращаясь к исходному равенству, имеем

$$F(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_1(\Delta y_1) \ldots p_n(\Delta y_n)\, dy_1 \ldots dy_n,$$

таким образом, получаем n-мерную плотность (мы, как обычно положили $x_0 = 0$)

$$p(x_1, t_1;\, \ldots; x_n, t_n) = p_1(\Delta x_1) \ldots p_n(\Delta x_n), \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \tag{4.2}$$

или, в явном виде, вспоминая, что $p_k(\Delta x_k) = p_{\Delta \xi_k}(x_k - x_{k-1})$,

$$p(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k - t_{k-1})}}\, e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\sigma^2(t_k - t_{k-1})}} \tag{4.3}$$

для любых $x_1, \ldots; x_n \in \mathbb{R}$ и $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ (здесь $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$).

Винеровский процесс как предел дискретных случайных блужданий. Рассмотрим простейшую модель симметричных блужданий по действительной прямой. Пусть в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$, $k = 1, 2, \ldots,$ частица совершает прыжки длины Δx влево и вправо, выбирая каждое из двух возможных направлений случайным образом с вероятностью $1/2$. Пусть $w(t_n)$ – положение частицы в момент времени t_n. Представим случайную величину $w(t_n)$ в виде (здесь $\Delta w_k = w(t_k) - w(t_{k-1})$, $w(0) = 0$)

$$w(t_n) = \Delta w_1 + \cdots + \Delta w_n, \qquad P(\Delta w_k = \Delta x) = P(\Delta w_k = -\Delta x) = \frac{1}{2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что $M\Delta w_k = 0$, $M\Delta w_k = (\Delta x)^2/2$. Если мы считаем случайные величины $\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots$ независимыми, то к их сумме применима центральная предельная теорема:

$$\frac{1}{\sqrt{n(\Delta x)^2}} \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k \to w^*, \qquad n \to \infty,$$

где сходимость понимается как сходимость по распределению, величина w^* имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией.

Теперь рассмотрим случайный процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывным временем как следующий непрерывный предел описанных выше случайных блужданий: пусть время $t > 0$ фиксировано, положим $t = n\Delta t$ и $n \to \infty$, причём вместе с $\Delta t \to 0$ потребуем стремления к нулю Δx так, что

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 = \text{const}, \qquad 0 < \sigma^2 < \infty. \tag{4.4}$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}}\, w(t) = \sqrt{\frac{\Delta t}{\sigma^2 t}} \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k = \frac{1}{\sqrt{n(\Delta x)^2}} \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k \to w^*,$$

другими словами, в непрерывном пределе случайная величина $w(t)/\sqrt{\sigma^2 t}$ имеет стандартное нормальное распределение, и это эквивалентно тому, что $w(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$. Независимость приращений и однородность процесса вытекают из соответствующих свойств случайных блужданий.

Таким образом, процесс Винера можно рассматривать как предельный вариант дискретных случайных блужданий вдоль действительной прямой, когда промежутки времени между скачками и длина скачка согласованно (см. (4.4)) стремятся к нулю. Принято называть такую модель одномерным броуновским движением.

Аналитические свойства траекторий процесса Винера. Случайная величина $w(t+h) - w(t)$ имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma^2 h$, поэтому вследствие неравенства Чебышёва

$$P(|w(t+h) - w(t)| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2 h}{\varepsilon^2} \to 0, \qquad h \to +0,$$

а это означает, что $w(t+h) - w(t) \to 0$ по вероятности, если $h \to +0$. Ещё более очевидно, что $M\big(w(t+h) - w(t)\big)^2 = \sigma^2 h \to 0$, т. е. $w(t+h) - w(t) \to 0$ в среднем квадратичном смысле. Также имеет место сходимость с вероятностью единица, $P(w(t+h) - w(t) \to 0) = 1$, но показать её значительно сложнее, и мы это доказательство не приводим. С точки зрения траекторий это свойство означает, что почти все траектории процесса Винера – функции, непрерывные в каждой точке $t \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь случайную величину $\frac{w(t+h)-w(t)}{h}$, она распределена нормально с нулевым средним, но её дисперсия $\sigma^2 h/h^2 = \sigma^2/h \to \infty$ при $h \to +0$. Это означает, что данная случайная величина едва ли может иметь предел при $h \to +0$ в каком-либо смысле. Оказывается, справедливо следующее утверждение, которое мы также оставим без доказательства:

$$P\left\{\omega \in \Omega\colon \text{ существует } \lim_{h\to+0} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \text{ хотя бы для одного } t \geqslant 0\right\} = 0,$$

то есть почти все траектории процесса Винера являются *нигде не дифференцируемыми* функциями.

Процесс Винера и уравнение теплопроводности. В этом пункте мы покажем, как получить процесс Винера из некоторых достаточно общих предположений о поведении одномерной плотности распределения.

Теорема 4.1. *Пусть случайный процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$, является однородным процессом с независимыми приращениями, начинающимся в нуле. Пусть распределение приращения $\Delta w(h) = w(t+h)-w(t)$ абсолютно непрерывно и плотность $p(\,\cdot\,,h)$ распределения случайной величины $\Delta w(h)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) частные производные $\frac{\partial^k p(x,t)}{\partial x^k}$ непрерывны по x и ограничены вплоть до третьего порядка ($k = 1, 2, 3$) для всех $x \in \mathbb{R}$ при любом фиксированном $t > 0$ и непрерывны по t вплоть до второго порядка ($k = 1, 2$) для всех $t > 0$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$;

2) при $h \to +0$ имеют место асимптотические равенства для моментов случайной величины $\Delta w(h)$

$$\begin{aligned} \frac{M\Delta w(h)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} x p(x,h)\,dx = M_1 + o(h), \\ \frac{M(\Delta w(h))^2}{h} &= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x,h)\,dx = M_2 + o(h), \\ \frac{M|\Delta w(h)|^3}{h} &= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 p(x,h)\,dx = M_3 + o(h), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $M_1 = 0$, $M_2 = \sigma^2 > 0$, $M_3 = 0$.

Тогда случайная величина $w(t)$ при каждом $t > 0$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$:

$$p_{w(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < z < \infty. \tag{4.6}$$

Доказательство. Выразим случайную величину $w(t+h)$ через приращения: с учётом того, что по условию $P(w(0) = 0) = 1$:

$$w(t+h) = w(t+h)-w(0) = w(t+h)-w(t)+w(t)-w(0), \qquad \Delta w(t+h) = \Delta w(h)+\Delta w(t),$$

причём слагаемые в правой части последнего равенства суть независимые случайные величины. Плотность распределения суммы независимых случайных величин есть свёртка плотностей распределения слагаемых, и в наших обозначениях мы имеем

$$p(z, t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z-x,t)p(x,h)\,dx. \tag{4.7}$$

Теперь разложим $p(z-x,t)$ в ряд Тейлора по x до третьего порядка:

$$p(z-x,t) = p(z,t) - x\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} - \frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3},$$

где $z - x \leqslant z_x^* \leqslant z$. Первая и вторая частные производные не зависят от x и в формуле (4.7) могут быть вынесены из интеграла, а третья производная по условию ограничена на всей числовой прямой,

$$\left|\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3}\right| \leqslant C.$$

Кроме того, с учётом нормировки плотности и условий (4.5) мы можем записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x,t)\,dx = h\big(M_k + o(h)\big), \quad k = 1,2,3.$$

Подставляя все эти соотношения в (4.7), получаем

$$p(z,t+h) = p(z,t) - h\big(M_1 + o(h)\big)\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{h(M_2 + o(h))}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3} p(x,t)\,dx. \tag{4.8}$$

Последнее слагаемое в силу ограниченности третьей производной допускает оценку

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3} p(x,t)\,dx\right| \leqslant C\left|\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 p(x,t)\,dx\right| = C\big(M_3 + o(h)\big). \tag{4.9}$$

Теперь подставим в (4.8), (4.9) значения $M_1 = M_3 = 0$ и $M_2 = \sigma^2$ и получим

$$\frac{p(z,t+h) - p(z,t)}{h} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} + o(h), \tag{4.10}$$

что в пределе $h \to +0$ даёт дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2}. \tag{4.11}$$

Это уравнение необходимо дополнить условием неотрицательности плотности распределения, условием нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,dx = 1$ и сингулярным начальным условием $p(z,0) = \delta(0)$, которое согласуется с требованием $P(w(0) = 0) = 1$. Решением полученной задачи является функция

$$p(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < z < \infty. \tag{4.12}$$

Тем самым теорема доказана.

Замечание 4.1. На самом деле, переходя в (4.10) к пределу $h \to +0$, мы получили правую производную по времени. Для расчёта левой производной при $t > 0$ следует взять $0 < h < t$ и всюду заменить $t + h$ на t и t – на $t - h > 0$. Тогда вместо (4.10) мы получим

$$\frac{p(z,t) - p(z,t-h)}{h} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t-h)}{\partial z^2} + o(h),$$

но мы предположили, что производная в правой части (как функция двух переменных x и t) непрерывна по t при любом $t > 0$ и фиксированном x. Поэтому вновь получаем при $h \to +0$ уравнение (4.11). В нём производная по времени левая, а вторая производная по z осталась без изменений. Таким образом, мы можем утверждать, что производная по времени в уравнении (4.11) понимается в классическом смысле.

Замечание 4.2. Соотношения $M_2 = \sigma^2 > 0$ и $M_3 = 0$ в условиях (4.5) говорят о том, что при малых h малые отклонения случайной величины $w(h)$ от нуля более вероятны, чем большие.

Замечание 4.3. Если в условиях (4.5) положить $M_1 = \mu \neq 0$, то мы получим вместо (4.11) уравнение

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2}.$$

с теми же условиями неотрицательности, нормировки и начальным условием, что и выше. Заменой $x - \mu t \mapsto x$ это уравнение сводится к (4.11) и, возвращаясь к исходной переменной, мы получаем решение

$$p_(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(z-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Такой случайный процесс отвечает переходу к непрерывному пределу в модели несимметричных случайных блужданий, в которых прыжок направо совершается с вероятностью p, а прыжок налево – с вероятностью q, $p + q = 1$ и $p - q = \mu$.

Распределение времени первого достижения данного уровня. Как обычно, будем считать, что случайный процесс Винера стартует из нуля. Зафиксируем некоторое значение $x > 0$ и определим случайную величину τ_x, равную моменту первого достижения траекторией процесса точки x. А именно, $\tau_x = t$, если $w(s) < x$ для всех $0 \leqslant s < t$ и $w(t) = x$.

Найдём распределение случайной величины τ_x. Для решения этой задачи мы примем без доказательства одно тождество:

$$P(w(t) < x \,|\, \tau_x < t) = P(w(t) > x \,|\, \tau_x < t) = \frac{1}{2}, \qquad x > 0, \quad t > 0. \tag{4.13}$$

Смысл этого равенства в том, что если в какой-то момент времени $\tau_x = s$ частица достигла точки x, то последующие блуждания (при $t > s$) симметричны относительно точки x. Это условие представляется довольно естественным, его можно понимать как «сдвиг» очевидного равенства $P(w(t) \leqslant 0) = P(w(t) \geqslant 0) = 1/2$, получающийся в результате сдвига начала координат на плоскости переменных $\big(t, \xi\big)$ из точки $(0, 0)$ в точку (s, x).

На основании сделанного допущения найдём $F_{\tau_x}(t) = P(\tau_x < t)$. Очевидно, что если $\tau_x \geqslant t$, т. е. первое достижение точки с координатой x случилось не ранее, чем в момент времени t, то вплоть до момента времени t траектория процесса не поднималась выше уровня x, т. е. $w(t) \leqslant x$. Другими словами, событие $\tau_x \geqslant t$ влечёт $w(t) \leqslant x$, и, переходя к дополнениям этих событий, мы получаем, что событие $w(t) < x$ влечёт $\tau_x < t$. Следовательно, в (4.13)

$$\frac{1}{2} = P(w(t) > x \,|\, \tau_x < t) = \frac{P(w(t) > x, \tau_x < t)}{P(\tau_x < t)} = \frac{P(w(t) > x)}{P(\tau_x < t)},$$

откуда

$$\begin{aligned} F_{\tau_x}(t) = P(\tau_x < t) = 2P(w(t) > x) = 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}\, dz = \\ = 2\int_{x/\sqrt{\sigma^2 t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right)\right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $\Phi(\,\cdot\,)$ – так называемый интеграл вероятности (функция стандартного нормального распределения),

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz, \qquad \Phi'(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Найдём производную $F'_{\tau_x}(t) = p_{\tau_x}(t)$:

$$p_{\tau_x}(t) = -2\Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \cdot \frac{d}{dt}\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{x}{t^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad t > 0. \tag{4.15}$$

Здесь $x > 0$ есть параметр плотности распределения $p_{\tau_x}(\,\cdot\,)$.

Из формулы (4.15) нетрудно получить распределение случайной величины (далее $t > 0$ есть фиксированный параметр)

$$w^*(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s),$$

равной максимальному значению процесса Винера на промежутке $[0, t]$. Отметим, что в силу непрерывности траектории максимум достигается с вероятностью единица. Мы будем искать $F^*_t(z) = P(w^*(t) < z)$ для $z > 0$; при $z < 0$ следует заменить максимум на минимум и воспользоваться симметричностью процесса, т. е. тем, что $P(w(t) > 0) = P(w(t) < 0)$.

Нетрудно заметить, что если $w^*(t) < z$, то $w(s) < z$ для всех $s \in [0, t]$, и первое достижение траекторией уровня z с необходимостью наступает позже времени t, другими словами, $\tau_z > t$. Верно и обратное: если $\tau_z > t$, то при любом $s \leqslant t$ траектория процесса ещё не достигла уровня z, т. е. $w(s) < z$ для всех $s \in [0, t]$, а это влечёт $w^*(s) < z$. Таким образом, события $w^*(t) < z$ и $\tau_z > t$ равносильны, поэтому

$$F^*_t(z) = P(w^*(t) < z) = P(\tau_z > t) = 1 - P(\tau_z \leqslant t) = 1 - P(\tau_z < t) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) - 1.$$

Мы воспользовались тем, что распределение случайной величины τ_z абсолютно непрерывно ($P(\tau_z = t) = 0$), и формулой (4.14). Дифференцируя функцию распределения, получаем

$$p^*_t(z) = \frac{dF^*_t(z)}{dz} = 2\Phi'\left(\frac{z}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad z > 0.$$

Здесь $t > 0$ есть параметр плотности распределения $p^*_t(\,\cdot\,)$.

Заметим, что непосредственным вычислением интеграла мы получаем для любого $t > 0$

$$P(\max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s) > 0) = \int_0^{\infty} p^*_t(z)\, dz = 1.$$

Пользуясь аналогичными рассуждениями или тем, что процесс Винера не меняет свои статистические свойства при замене $w(t)$ на $-w(t)$, получаем для любого $t > 0$

$$P(\min_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s) < 0) = 1.$$

Это означает, что непрерывная траектория процесса Винера, выйдя из нуля, за сколь угодно короткое время может оказаться и правее, и левее нуля с вероятностью единица.

Закон арксинуса. Введём ещё одну случайную величину $\tau^*(t)$, равную первому моменту времени на промежутке $[0,t]$, когда траектория достигла своего максимального значения; здесь $t>0$ есть фиксированный параметр. Как уже отмечалось, вследствие непрерывности траектории такой момент времени с вероятностью единица существует. Очевидно, $0 \leqslant \tau^*(t) \leqslant t$ с вероятностью единица. Вычислим плотность вероятности этой случайной величины.

Рассмотрим две уже знакомые нам случайные величины: $w^*(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s)$ – максимальное значение процесса Винера на промежутке $[0,t]$ и τ_x – момент первого достижения траекторией процесса уровня x. Далее мы не указываем зависимость случайных величин от фиксированного $t>0$ и пишем их как w^* и τ^*.

Найдём условную плотность $p_{w^*|\tau_x}(z|u)$ при $0<x\leqslant z$ и $0<u<t$:

$$p_{w^*|\tau_x}(z|u)\,dz = P(z \leqslant w^* < z+dz \,|\, u<\tau_x<u+du).$$

Дальнейшие рассуждения мы будем проводить не совсем строго, заменяя события $z\leqslant w^* < z+dy$ и $u<\tau_x<u+du$ равенствами $w^*=z$ и $\tau_x=u$, хотя, конечно же, $P(w^*=z)=0$ и $P(\tau_x=u)=0$.

Если $\tau_x = u$ и $x \leqslant z$, то до момента времени u траектория процесса ещё не достигла уровня x, следовательно, $w(s)<x$ для любого $s\in[0,u)$. Если мы считаем, что $z\geqslant x$, то тем более $w(s)<z$ для любого $s\in[0,u)$. Таким образом, максимальное значение $w^*=z$ заведомо достигается после времени u,

$$z = \max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s) = \max_{u\leqslant s\leqslant t} w(s).$$

При этом в силу $\tau_x = u$ мы имеем $w(u)=x$, таким образом, при условии $\tau_x=u$ процесс $w(t)$, $t\geqslant u$, есть винеровский процесс, стартовавший из точки $w(t)=x$. Сдвинем начало координат (t,x) в пространстве переменных (t,ξ) в точку $(0,0)$, т. е. совершим замену $\hat{w}(t) = w(t-u)-x$, где x и u – фиксированные неслучайные параметры. Стохастические свойства процесса $\hat{w}(t)$, $t\geqslant 0$, полностью эквивалентны свойствам процесса $w(t)$, $t\geqslant 0$. Таким образом, при условии $\tau_x=u$ случайная величина

$$w^* = \max_{0\leqslant s\leqslant t} w(s) = \max_{u\leqslant s\leqslant t} w(s)$$

имеет то же распределение, что и случайная величина

$$x + \max_{u\leqslant s\leqslant t}\bigl(w(s)-x\bigr) = x + \max_{0\leqslant s\leqslant t-u} \hat{w}(s) = x + w^*(t-u).$$

Нетрудно найти плотность вероятности такой сдвинутой на x случайной величины: мы имеем $p_{x+w^*(t-u)}(z) = p_{w^*(t-u)}(z-x)$ или, в явном виде,

$$p_{w^*(t)|\tau_x}(z|u) = p^*_{t-u}(z-x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{t-u}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad 0<u<t, \quad 0<x\leqslant z.$$

Далее запишем совместную плотность, используя формулу (4.15):

$$p_{w^*,\tau_x}(z,u) = p_{w^*|\tau_x}(z|u)\,p_{\tau_x}(u) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{t-u}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{x}{u^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 u}} =$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \cdot \frac{x}{u} \cdot e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 u}}, \qquad 0 < u < t, \quad 0 < x \leqslant z.$$

Перейдём к пределу $x \to z - 0$, получим

$$p_{w^*, \tau_z}(z, u) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \cdot \frac{z}{u} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad 0 < u < t. \tag{4.16}$$

Вспомним, что τ_x – момент, когда траектория винеровского процесса в первый раз достигает уровня x. Если нас интересует достижение уровня $x = z = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s)$, то $\tau_x = \tau^*(t)$. Таким образом, формула (4.16) даёт нам совместную плотность случайных величин w^* и τ^*. Отсюда

$$\begin{aligned} p_{\tau^*}(u) &= \int_0^\infty p_{w^*, \tau^*}(z, u)\, dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \int_0^\infty \frac{z}{\sigma^2 u} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}\, dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}}, \qquad 0 < u < t. \end{aligned}$$

Парадоксальность этого результата состоит в том, что плотность вероятности времени достижения траекторией своего максимума увеличивается к концам отрезка $[0, t]$, т. е. максимум скорее всего будет достигнут либо в самом начале, либо в самом конце промежутка наблюдения за винеровским процессом. Если мы обратимся к функции распределения случайной величины τ^*, то получим после несложных вычислений

$$F_{\tau^*}(u) = \int_0^u p_{\tau^*(t)}(\tilde{u})\, d\tilde{u} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{u}{t}}, \qquad 0 < u < t.$$

Это равенство носит название *закон арксинуса.*

5. ОДНОРОДНЫЕ МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – случайный процесс с непрерывным временем. Будем считать, что каждая из случайных величин $\xi(t)$ принимает значения из одного и того же конечного множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$ при любом $t > 0$, другими словами,

$$\sum_{j=1}^{s} P(\xi(t) = x_j) = 1. \tag{5.1}$$

Если реализовалось событие $\xi(t) = x_j$, будем говорить, что в момент времени t система, описываемая данным процессом, пребывает в состоянии x_j,

Определение 5.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в множестве $\{x_1, \ldots, x_s\}$ называется *марковским*, если при любых $n = 2, 3, \ldots$ и любых $t_0, t_1, \ldots t_n$, удовлетворяющих условию $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, случайные величины $\xi(t_0), \ldots, \xi(t_{n-1}), (\xi(t_n)$ образуют цепь Маркова, т. е. для любых $x_{i_0}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$, выбранных из множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} P(\xi(t_n) = x_{i_n} \,|\, \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0}) = \\ = P(\xi(t_n) = x_{i_n} \,|\, \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Далее мы считаем, что для $0 \leqslant s < t$

$$P(\xi(t) = x_j \,|\, \xi(s) = x_i) = \pi_{ij}(t - s), \qquad i, j = 1, \ldots, s, \tag{5.3}$$

то есть данная вероятность зависит от $t - s$, а не от t и s по отдельности. Вероятности $\pi_{ij}(t - s)$ называются *вероятностями перехода* из состояния x_i в состояние x_i за время $t - s > 0$.

Для такого марковского процесса можно записать

$$\pi_{ij}(t) = P(\xi(t) = x_j \,|\, \xi(0) = x_i), \qquad i, j = 1, \ldots, s, \tag{5.4}$$

и тем самым задать на множестве $\{t > 0\}$ матричнозначную функцию $\pi(\,\cdot\,)$ со значениями в множестве Mat_s действительных матриц размера $s \times s$. При $t = 0$, очевидно, имеем

$$\pi_{ij}(0) = P(\xi(t) = x_j \,|\, \xi(t) = x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{5.5}$$

или, в матричном виде, $\pi(0) = I$, где I – единичная матрица размера $s \times s$.

Всюду далее мы рассматриваем только марковские процессы, удовлетворяющие условию (5.3), с конечным множеством состояний ($1 < s < \infty$) и называем их просто марковскими процессами.

Чтобы найти любое конечномерное распределение марковского процесса, нужно задать начальное распределение

$$P(\xi(0) = x_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, s, \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i = 1, \tag{5.6}$$

и матрицу вероятностей перехода $\pi(t)$ за любое конечное время $t > 0$.

Одномерное распределение процесса в любой момент времени $t > 0$ получается из формулы полной вероятности:

$$P(\xi(t) = x_j) = \sum_{i=1}^{s} a_i \pi_{ij}(t), \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{5.7}$$

Многомерные распределения также выводятся из формулы полной вероятности, но дополнительно используется определяющее свойство марковского процесса: для любого $n = 2, 3, \ldots$ и для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$

$$\begin{aligned} &P(\xi(t_0) = x_{i_0}, \ldots, \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \xi(t_n) = x_{i_n}) = \\ &\quad = P(\xi(t_n) = x_{i_n} \mid \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0}) P(\xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0}) = \\ &\quad = P(\xi(t_n) = x_{i_n} \mid \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}) P(\xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0}) = \\ &\quad = \pi_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) P(\xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0}); \end{aligned} \tag{5.8}$$

далее, применяя подобные формулы последовательно к любым совместным вероятностям $P(\xi(t_{n-k}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0})$ для $k = 1, \ldots, n$ и переставляя сомножители в порядке от «раннего» к «позднему», получаем

$$\begin{aligned} P(\xi(t_0) = x_{i_0}, \ldots, &\xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \xi(t_n) = x_{i_n}) = \\ &= a_{i_0} \pi_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \ldots \pi_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Если рассматривать матрицы перехода в фиксированные моменты времени, то их свойства повторяют свойства матриц перехода в цепях Маркова. Перечислим важнейшие из них (далее индексы матричных элементов пробегают множество $1, \ldots, s$, а временные переменные – множество $\mathbb{R}_+$ и произвольны).

1. Элементы матриц перехода удовлетворяют неравенству $0 \leqslant \pi_{ij}(t) \leqslant 1$.
2. Справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}(t) = 1, \qquad i = 1, \ldots, s, \qquad t > 0, \tag{5.10}$$

отражающее аналогичное (5.1) условие нормировки условного распределения случайной величины $\xi(t)$ при фиксированном начальном состоянии $\xi(0) = x_i$

3. Для матриц перехода выполняется уравнение Чепмена–Колмогорова

$$\pi(t + u) = \pi(t)\pi(u) = \pi(u)\pi(t), \qquad t, u > 0. \tag{5.11}$$

В самом деле, вставив полную группу событий $\xi(t) = x_k$, $k = 1, \ldots, s$, и применив формулу (5.9) для трехмерного распределения, получаем

$$\pi_{ij}(t + u) = P(\xi(t + u) = x_j \mid \xi(0) = x_i) = \frac{P(\xi(t + u) = x_j, \xi(0) = x_i)}{P(\xi(0) = x_i)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{s} \frac{P(\xi(t + u) = x_j, \xi(t) = x_k, \xi(0) = x_i)}{P(\xi(0) = x_i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \frac{P(\xi(0) = x_i)\pi_{ik}(t)\pi_{kj}(u)}{P(\xi(0) = x_i)} = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\pi_{kj}(u),$$

что и дает элемент произведения матриц $\pi(t)\pi(u)$. Если во второй строке этой цепочки равенств использовать разложение по полной группе событий $\{\xi(u) = x_k\}_{k=\overline{1,s}}$ вместо полной группы $\{\xi(t) = x_k\}_{k=\overline{1,s}}$, то в правой части равенства мы получим элемент матрицы $\pi(u)\pi(t)$.

Как следствие этого уравнения можно записать, например, матричное равенство $\pi(n \cdot t) = [\pi(t)]^n$ для любого натурального n и любого $t > 0$.

По сути марковский процесс есть цепь Маркова, в которой переходы между состояниями происходят не в фиксированные дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, а через произвольные промежутки $\Delta t > 0$.

В дальнейшем нас будут интересовать аналитические свойства матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{M}_s$: непрерывность, дифференцируемость и пр. Условимся, что матричные равенства, связанные с предельными переходами, мы будем понимать как поэлементные, например

$$\lim_{h\to+0} \pi(h) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{h\to+0} \pi_{ij}(h) = A_{ij} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \ldots, s,$$

а равенства

$$\dot{\pi}(t) \equiv \frac{d\pi}{dt} = D, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \pi(t)\, dt = V$$

эквивалентны

$$\dot{\pi}_{ij}(t) \equiv \frac{d\pi_{ij}}{dt} = D_{ij}, \quad \int_{t_1}^{t_2} \pi_{ij}(t)\, dt = V_{ij} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \ldots, s.$$

Здесь $A, D, V \in \mathrm{Mat}_s$.

Система уравнений Колмогорова для матриц перехода. В наших математических выкладках очень важную роль будет играть условие $s < \infty$. Оно позволит нам менять местами предельные переходы и любые суммы или произведения по состояниям: условно можно записать равенства

$$\lim \sum_{i=1}^{s} (\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{s} \lim(\,\cdot\,), \qquad \lim \prod_{i=1}^{s} (\,\cdot\,) = \prod_{i=1}^{s} \lim(\,\cdot\,).$$

Для бесконечного (счётного) числа состояний эти равенства требуют обоснования, но многие утверждения тем не менее останутся верными, возможно, при некоторых дополнительных условиях.

Докажем несколько лемм. Начнём с непрерывности матрицы перехода. Для $t = 0$ непрерывность будем понимать, конечно же, как непрерывность справа и постулируем эту непрерывность без доказательства: потребуем

$$\pi_{ij}(h) \to \delta_{ij} \quad \text{при} \quad h \to +0 \tag{5.12}$$

или, в матричной записи,

$$\pi(t) \to \pi(0) = I \quad \text{при} \quad t \to +0. \tag{5.13}$$

Это условие согласовано с (5.5) и означает, что, попав в любое состояние x_i, случайный процесс с вероятностью единица остаётся в этом состоянии некоторое положительное время. Точнее, если случайная величина τ_i равна времени пребывания в i-м состоянии, то $P(\tau_i > 0) = 1$.

Лемма 5.1. *Матричнозначная функция* $\pi(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{M}_s$ *непрерывна при всех* $t > 0$, *т. е. для любого фиксированного* $t > 0$

$$\lim_{h\to+0}\bigl(\pi(t+h)-\pi(t)\bigr) = \lim_{h\to+0}\bigl(\pi(t)-\pi(t-h)\bigr) = O,$$

где в правой части равенства O *означает матрицу, все элементы которой равны нулю.*

Доказательство. Непрерывность справа непосредственно вытекает из уравнения Чепмена–Колмогорова (5.11) и условия (5.13):

$$\pi_{ij}(t+h)-\pi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{s}\pi_{ik}(t)\pi_{kj}(h)-\pi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{s}\pi_{ik}(t)\bigl(\pi_{kj}(h)-\delta_{kj}\bigr) \to 0, \quad h\to+0,$$

при любых $i, j = 1, \dots, s$ для любого фиксированного $t > 0$.

Непрерывность слева также следует из уравнения Чепмена–Колмогорова, но потребуются чуть более сложные рассуждения. Для $t > 0$ и $0 < h < t$ имеем

$$\pi(t)-\pi(t-h) = \pi(t-h)\bigl(\pi(h)-I\bigr),$$

отсюда в силу $0 \leqslant \pi_{ik}(t-h) \leqslant 1$ получаем оценку

$$\begin{aligned}|\pi_{ij}(t)-\pi_{ij}(t-h)| &= \left|\sum_{k=1}^{s}\pi_{ik}(t-h)\bigl(\pi_{kj}(h)-\delta_{ij}\bigr)\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{s}\pi_{ik}(t-h)|\pi_{kj}(h)-\delta_{kj}| \leqslant \sum_{k=1}^{s}|\pi_{kj}(h)-\delta_{kj}| \to 0, \quad h\to+0,\end{aligned}$$

при любых $i, j = 1, \dots, s$ для любого фиксированного $t > 0$. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *При любом* $t \geqslant 0$ *матрица* $\pi(t)$ *невырожденна.*

Доказательство. Заметим, что в силу (5.5) определитель матрицы $\pi(h)$ как некоторая вполне конкретная (конечная) сумма произведений её элементов стремится при $h \to +0$ к определителю матрицы I, т. е. к единице. Поэтому найдётся такое $h_0 > 0$, что $\det\pi(h) \neq 0$ при $h < h_0$. Это означает, что матрица $\pi(h)$ невырожденна при достаточно малых h. Далее, для произвольного фиксированного $t > 0$ всегда можно найти такое натуральное n, что $t/n < h_0$. Тогда по уравнению Чепмена–Колмогорова

$$\det\pi(h) = \det\pi^n(t/n) = \bigl(\det\pi(t/n)\bigr)^n \neq 0, \qquad t/n < h_0,$$

а это и означает, что матрица $\det\pi(h)$ невырожденна при любом $h > 0$.

Замечание 5.1. Рассмотрим непрерывность определителя матрицы как функции от её s^2 элементов более формально. Возьмём две матрицы π и $\tilde{\pi}$ из Mat_s. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся значение $\delta > 0$ такое, что если $|\pi_{ij} - \tilde{\pi}_{ij}| < \delta$ для всех $i, j = 1, \ldots, s$, то $|\det \pi - \det \tilde{\pi}| < \varepsilon$. Заметим, что если мы рассматриваем непрерывность определителя «в точке» π (т. е. при фиксированных элементах этой матрицы), то параметр δ определяется этими элементами и $\varepsilon > 0$, что мы запишем как $\delta = \delta(\pi, \varepsilon)$.

Теперь исследуем матрицу $\dot{\pi}(t)$ с элементами

$$\dot{\pi}_{ij}(t) = \frac{d\pi_{ij}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\pi(t+h) - \pi(t)}{h}, \qquad i, j = 1, \ldots, s.$$

Лемма 5.3. *Зададим матричнозначную функцию*

$$J(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du, \qquad 0 < t_1 < t_2.$$

Тогда найдётся $\delta > 0$, определяющееся матрицей $\pi(t_1)$, такое, что при $t_2 - t_1 < \delta$ существует обратная матрица $R(t_1, t_2) = J^{-1}(t_1, t_2)$.

Доказательство. Пользуясь непрерывностью $\pi(\,\cdot\,)$ как матричнозначной функции на $\mathbb{R}_+$, запишем формулу среднего для каждого элемента матрицы: для любых $0 < t_1 < t_2$ при каждых $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \pi_{ij}(u)\, du = \pi_{ij}(t_1 + h_{ij}), \qquad 0 \leqslant h_{ij} \leqslant t_2 - t_1.$$

Обозначим матрицу с элементами $\pi_{ij}(t_1 + h_{ij})$ как $\tilde{\pi}$.

Поскольку $d = \det \pi(t_1) \neq 0$ при любом $t_1 \geqslant 0$, мы можем выбрать какое-либо положительное $\varepsilon < |d|$ (например, взять $\varepsilon = |d|/2$) и, пользуясь замечанием 5.1, найти $\delta > 0$ такое, что $|\det \pi(t_1) - \det \tilde{\pi}| < \varepsilon$, если $|\pi_{ij} - \tilde{\pi}_{ij}| < \delta$. Заметим, что ε определяется исключительно определителем d и, следовательно, только элементами матрицы $\pi(t_1)$, таким образом, $\delta = \delta(\varepsilon)$ также полностью определяется элементами матрицы $\pi(t_1)$. При этом, если мы потребуем $t_2 - t_1 < \delta$, то $0 \leqslant h_{ij} < \delta$, отсюда

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \det J(t_1, t_2) = \det \tilde{\pi} > d - \varepsilon \neq 0, \quad \text{если} \quad 0 < t_2 - t_1 < \delta.$$

Следовательно, при $0 < t_2 - t_1 < \delta$ существует $R(t_1, t_2) = J^{-1}(t_1, t_2)$.

Лемма 5.4. *Матричнозначная функция $\pi(\cdot)$ имеет правую производную в точке $t = 0$, т. е. существует матрица Λ размера $s \times s$ такая, что*

$$\lim_{h\to +0} \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h} = \Lambda. \tag{5.14}$$

Доказательство. Применим уравнение (5.11) Чепмена–Колмогорова и запишем цепочку матричных равенств для $h > 0$ и любых $0 < t_1 < t_2$

$$\big(\pi(h) - I\big) \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du = \int_{t_1}^{t_2} \pi(h)\pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \pi(u+h)\,du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\,du = \int_{t_1+h}^{t_2+h} \pi(u)\,du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\,du.$$

Теперь будем считать, что $0 < h < t_2 - t_1$, тогда $t_1 < t_1 + h < t_2 < t_2 + h$ и

$$\int_{t_1+h}^{t_2+h} \pi(u)\,du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\,du = \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\,du - \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\,du.$$

В обозначениях леммы 5.3 мы можем записать результат нашей цепочки преобразований как

$$\big(\pi(h) - I\big)J(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\,du - \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\,du, \tag{5.15}$$

и это равенство верно для любых $0 < t_1 < t_2$ и $0 < h < t_2 - t_1$.

Пусть теперь $t_2 - t_1 < \delta$, где $\delta = \delta(\pi(t_1))$ взято из леммы 5.3. Тогда

$$\frac{\pi(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\,du - \frac{1}{h}\int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\,du\right) R(t_1, t_2).$$

причём это равенство верно при любом $t_1 > 0$ и $t_2 - t_1 < \delta$, где $\delta > 0$ определяется элементами матрицы $\pi(t_1)$ и не зависит от h. При $h \to +0$ с учетом непрерывности матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)$ и формул для средних значений интегралов в правой части равенства существует

$$\lim_{h\to+0}\left(\frac{1}{h}\int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\,du - \frac{1}{h}\int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\,du\right) = \pi(t_2) - \pi(t_1).$$

Следовательно,

$$\lim_{h\to+0} \frac{\pi(h) - I}{h} = \big(\pi(t_2) - \pi(t_1)\big)R(t_1, t_2). \tag{5.16}$$

Выберем какие-либо удовлетворяющие всем необходимым условиям t_1 и t_2, зафиксируем их и для этих фиксированных времён обозначим матрицу в правой части равенства (5.16) через Λ. Тогда, учитывая, что $I = \pi(0)$, получаем

$$\lim_{h\to+0} \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h} = \Lambda.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Матрица $\pi(\,\cdot\,)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и удовлетворяет уравнениям Колмогорова*

$$\dot{\pi}(t) = \Lambda\pi(t), \tag{5.17а}$$

$$\dot{\pi}(t) = \pi(t)\Lambda. \tag{5.17б}$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением (5.11). Для произвольного $t > 0$ имеем

$$\frac{\pi(t+h) - \pi(t)}{h} = \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h}\pi(t) = \pi(t)\frac{\pi(h) - \pi(0)}{h},$$

откуда

$$\lim_{h\to+0} \frac{\pi(t+h) - \pi(t)}{h} = \Lambda\pi(t) = \pi(t)\Lambda, \tag{5.18}$$

т. е. матрица $\pi(t)$ имеет правую производную при всех $t > 0$ и для правой производной верны уравнения (5.17а) и (5.17б).

Теперь найдём левую производную. Зафиксируем $t > 0$ и выберем $0 < h < t$, тогда

$$\frac{\pi(t) - \pi(t-h)}{h} = \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h}\pi(t-h) = \pi(t-h)\frac{\pi(h) - \pi(0)}{h},$$

перейдём к пределу при $h \to +0$, учитывая непрерывность $\pi(t-h) \to \pi(t)$, получим

$$\lim_{h\to+0} \frac{\pi(t) - \pi(t-h)}{h} = \Lambda\pi(t) = \pi(t)\Lambda, \tag{5.19}$$

и эти равенства вместе с (5.18) влекут уравнения (5.17а), (5.17б).

Непрерывность матричнозначной функции $\dot{\pi}(t)$, $t > 0$, непосредственно следует из непрерывности матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)$ и любого из уравнений (5.17а), (5.17б). Теорема доказана.

Замечание 5.2. В случае счётного числа состояний система уравнений Колмогорова также верна, но следует наложить на матрицы $\pi(t)$ некоторые дополнительные условия.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний. Положим $p_i(t) = P(\xi(t) = x_i)$, $i = 1, \ldots, s$, и выведем из уравнения (5.17б) систему дифференциальных уравнений для функций $p_i(\,\cdot\,)$. Имеем

$$p_j(t) \overset{\text{def}}{=\!=} P(\xi(t) = x_j) = \sum_{i=1}^{s} P(\xi(t) = x_j \,|\, \xi(0) = x_i)P(\xi(0) = x_i) = \sum_{i=1}^{s} \pi_{ij}(t)a_i,$$

где a_i – начальная вероятность. Отсюда в силу уравнения (5.17б)

$$\begin{aligned}\dot{p}_j(t) &= \sum_{i=1}^{s} \dot{\pi}_{ij}(t)a_i = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\Lambda_{kj}\right)a_i = \\ &= \sum_{k=1}^{s} \Lambda_{kj}\left(\sum_{i=1}^{s} \pi_{ik}(t)a_i\right) = \sum_{k=1}^{s} p_k(t)\Lambda_{kj},\end{aligned}$$

Итак, мы имеем

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{k=1}^{s} p_k(t)\Lambda_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{5.20}$$

В ряде случаев уравнение (5.20) удобно записать в другом виде. Заметим, что для любого $j = 1, \ldots, s$ и любого $h > 0$

$$\sum_{k=1}^{s}\bigl(\pi_{jk}(h) - \delta_{jk}\bigr) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{jk}(h) - 1 = 0,$$

поскольку выполнено условие стохастичности $\sum_{k=1}^{s} \pi_{jk}(h) = 1$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{s} \Lambda_{jk} = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{s}\bigl(\pi_{jk}(h) - \delta_{jk}\bigr) = 0, \qquad \Lambda_{jj} = -\sum_{k\colon k\neq j} \Lambda_{jk}.$$

Таким образом, получаем

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{k\colon k\neq j}^{s} p_k(t)\Lambda_{kj} - p_j(t)\sum_{k\colon k\neq j}\Lambda_{jk}, \qquad j=1,\ldots,s. \tag{5.21}$$

Этот вид уравнения полностью отвечает физическому смыслу переходов в марковском процессе. Перепишем (5.21) как следующее приближённое равенство при малом $h>0$, учтя, что $\Lambda = \dot{\pi}(0)$:

$$\begin{aligned} p_j(t+h)-p_j(t) &\approx \sum_{k\colon k\neq j}^{s} p_k(t)(\pi_{kj}(h)-\delta_{kj}) - \sum_{k\colon k\neq j} p_j(t)(\pi_{jk}(h)-\delta_{jk}) = \\ &= \sum_{k\colon k\neq j}^{s} p_k(t)\pi_{kj}(h) - \sum_{k\colon k\neq j} p_j(t)\pi_{jk}(h). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Рассмотрим систему из большого числа N частиц, в которой каждая из частиц может находиться в одном из состояний $x_1,\ldots,x_s$, а динамика распределений по состояниям осуществляется по законам марковского процесса. Заменим вероятность на долю частиц в системе, находящихся в момент времени t в состоянии x_j, т. е. положим $p_j(t)\approx N_j(t)/N$. Тогда (5.22) описывает, как изменяется количество частиц, находящихся в момент t в состоянии x_j, за малое время h (уравнение баланса):

$$N_j(t+h)-N_j(t) \approx \sum_{k\colon k\neq j}^{s} N_k(t)P_h(k\to j) - \sum_{k\colon k\neq j} N_j(t)P_h(j\to k), \tag{5.23}$$

где $P_h(k\to j)$ – вероятность перехода из x_k в x_j за время h. При этом первая сумма в правой части (5.23) даёт число частиц, пришедших в состояние x_j из всех других состояний, а вторая – число частиц, ушедших из состояния x_j в какое-либо другое состояние. Мы полагаем, что за малое время происходит не более одного перехода, что согласуется с разложением $\pi(h) = I + \Lambda h + o(h)$.

Система уравнений (5.20) или (5.21) дополняется начальным условием $p_j(0)=a_j$, $j=1,\ldots,s$. Имеет место также условие нормировки $\sum_{j=1}^{s} p_j(t) = 1$. При этих условиях система (5.20) (или (5.21)) имеет единственное решение.

Пример 5.1. Покажем, что для процесса Пуассона (как марковского процесса со счётным числом состояний) справедлива система уравнений Колмогорова.

Решение. Из формулы (2.4) сразу понятно, что процесс Пуассона удовлетворяет марковскому условию (5.2). В самом деле, пусть для краткости

$$\mathcal{P}(m,t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\,e^{-\lambda t}.$$

Тогда из (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} &P(\xi(t_n)=m_n \,|\, \xi_{n-1}(t_{n-1})=m_{n-1},\ldots,\xi(t_0)=m_0) = \\ &\qquad = \frac{\prod_{k=1}^{n}\mathcal{P}(m_k-m_{k-1},t_k-t_{k-1})}{\prod_{k=1}^{n-1}\mathcal{P}(m_k-m_{k-1},t_k-t_{k-1})} = \mathcal{P}(m_n-m_{n-1},t_n-t_{n-1}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathcal{P}(m_n - m_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \cdot \mathcal{P}(m_{n-1}, t_{n-1})}{\mathcal{P}(m_{n-1}, t_{n-1})} =$$
$$= P(\xi(t_n) = m_n \,|\, \xi_{n-1}(t_{n-1}) = m_{n-1}).$$

Переходная вероятность имеет вид

$$\pi_{ij}(t) = P(\xi(t+u) = j \,|\, P(\xi(u) = i) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-\lambda t}, \qquad j - i \geqslant 0;$$

а если $j - i < 0$, то $\pi_{ij}(t, t+u) = 0$. Отсюда

$$\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & j-i<0, \\ -\lambda e^{-\lambda t}, & j-i=0, \\ -\lambda \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i-1}}{(j-i-1)!} e^{-\lambda t}, & j-i>0, \end{cases} \tag{5.24}$$

следовательно,

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left.\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0, & j-i<0, \\ -\lambda, & j-i=0, \\ \lambda, & j-i=1, \\ 0, & j-i>1. \end{cases}$$

Записав (5.24) как

$$\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & j<i, \\ -\lambda \pi_{ij}, & j=i, \\ -\lambda \pi_{ij} + \lambda \pi_{i+1,j}, & j>i, \end{cases}$$

видим, что уравнения Колмогорова $\dot{\pi}(t) = \Lambda \pi = \pi \Lambda$ в данном случае выполнены.

6. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В этой части мы будем рассматривать комплекснозначные случайные величины и комплекснозначные случайные процессы. Пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ есть случайная величина, т. е. $\xi(\omega) = \xi_{\mathrm{Re}}(\omega) + i\xi_{\mathrm{Im}}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, и ξ_{Re}, ξ_{Im} – действительнозначные случайные величины. Будем обозначать как $\bar{\xi}$ комплексно-сопряжённую случайную величину, $\overline{\xi(\omega)} = \xi_{\mathrm{Re}}(\omega) - i\xi_{\mathrm{Im}}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Нас не будет интересовать, как устроено совместное распределение действительной и мнимой частей, определим лишь два первых момента:

$$M\xi = M\xi_{\mathrm{Re}} + iM\xi_{\mathrm{Im}}, \quad \mathrm{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)\overline{(\eta - M\eta)}, \quad D\xi = \mathrm{cov}(\xi,\xi) = M|\xi - M\xi|^2.$$

Очевидно, что

$$M\bar{\xi} = \overline{M\xi}, \qquad \mathrm{cov}(\xi,\eta) = M\xi\,\overline{\eta} - M\xi \cdot M\,\overline{\eta}, \qquad D\xi = M|\xi|^2 - |M\xi|^2.$$

Линейное пространство гильбертовых случайных ыеличин. Рассмотрим множество (пространство) случайных величин

$$\mathcal{H} = \{\xi\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon\ M\xi = 0,\ \ M|\xi|^2 < \infty\}.$$

Каждую такую случайную величину ξ будем называть *гильбертовой*. Заметим, что в этом пространстве коэффициент ковариации обладает свойствами (комплексного) скалярного произведения: для любых случайных величин $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta \in \mathcal{H}$

- $\mathrm{cov}(\eta,\xi) = \overline{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}$,
- $\mathrm{cov}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \eta) = a_1\,\mathrm{cov}(\xi_1,\eta) + a_2\,\mathrm{cov}(\xi_2,\eta)$ для любых $a_1.a_2 \in \mathbb{C}$,
- $\mathrm{cov}(\xi,\xi) \geqslant 0$, причём $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(\xi = 0) = 1$.

Последнее утверждение вытекает из неравенства Чебышёва, $P(|\xi| \geqslant \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, если $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = D\xi = 0$.

Исходя из этих свойств коэффициента ковариации далее наряду с теоретико-вероятностными мы будем использовать стандартные обозначение линейной алгебры:

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M\xi\,\overline{\eta} = (\xi,\eta), \qquad \mathrm{cov}(\xi,\xi) = M|\xi|^2 = D\xi = (\xi,\xi) = \|\xi\|^2.$$

Из свойств скалярного произведения вытекает хорошо известное *неравенство Коши–Буняковского*:

$$|(\xi,\eta)| \leqslant \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \qquad \xi,\eta \in \mathcal{H}. \tag{6.1}$$

Доказательство этого неравенства стандартно, если случайные величины ξ, η таковы, что (ξ,η) – действительное число: для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\xi - a\eta\|^2 = M(\xi - a\eta)\overline{(\xi - a\eta)} = M|\xi|^2 - aM\xi\,\overline{\eta} - aM\,\bar{\xi}\eta + a^2M|\eta|^2 = \\ = \|\xi\|^2 - a(\xi,\eta) - a\overline{(\xi,\eta)} + a^2\|\eta\|^2 = \|\xi\|^2 - 2a(\xi,\eta) + a^2\|\eta\|^2.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Поскольку $\|\xi - a\eta\|^2 \geqslant 0$, правая часть (6.2) как квадратный трёхчлен по a неотрицательна при любом $a \in \mathbb{R}$. Следовательно, дискриминант этого квадратного трёхчлена неположителен. Последнее условие и означает, что $(\xi,\eta)^2 \leqslant \|\xi\|^2 \cdot \|\eta\|^2$, а это эквивалентно (6.1).

Если же (ξ, η) имеет мнимую часть, т.е. $(\xi, \eta) = re^{i\varphi}$, то, прежде чем писать соотношения (6.2), необходимо сделать линейное преобразование (изменить фазу одной из двух случайных величин, например ξ), положив $\tilde{\xi} = e^{-i\varphi}\xi$. Тогда $|\tilde{\xi}|^2 = |\xi|^2$ и $(\tilde{\xi}, \eta) = e^{-i\varphi}(\xi, \eta) = r = |(\xi, \eta)|$. При этом (6.2) принимает вид

$$\|\tilde{\xi} - a\eta\|^2 = \|\xi\|^2 - 2a|(\xi, \eta)| + a^2\|\eta\|^2.$$

Теперь мы можем применить те же рассуждения, что и выше, и получим неравенство $|(\xi, \eta)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \cdot \|\eta\|^2$.

Отметим, что $|(\xi, \eta)| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ тогда и только тогда, когда квадратный трёхчлен $\|\tilde{\xi} - a\eta\|^2$ имеет на оси $\mathbb{R}$ (ровно один) корень, который мы обозначим как a_0. В свою очередь, равенство $\|\tilde{\xi} - a_0\eta\|^2 = 0$ равносильно тому, что $\tilde{\xi} = a_0\eta$ с вероятностью единица, или, эквивалентно, $\xi = c_0\eta$, где $c_0 = a_0e^{i\varphi}$. Таким образом, равенство в неравенстве Коши–Буняковского достигается тогда и только тогда, когда с вероятностью единица $\xi = c_0\eta$, где c_0 – некоторое комплексное число.

Из неравенства (6.1) и очевидного неравенства $|\operatorname{Re}(\xi, \eta)|^2 \leqslant |(\xi, \eta)|^2$ следует

$$\begin{aligned}\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + (\xi, \eta) + (\eta, \xi) + \|\eta\|^2 = \|\xi\|^2 + 2\operatorname{Re}(\xi, \eta) + \|\eta\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|\xi\|^2 + 2|(\xi, \eta)| + \|\eta\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 + 2\|\xi\| \cdot \|\eta\| + \|\eta\|^2 = \big(\|\xi\| + \|\eta\|\big)^2,\end{aligned}$$

и мы имеем известное *неравенство треугольника*

$$\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|, \qquad \xi, \eta \in \mathcal{H}. \tag{6.3}$$

Отметим ещё одно полезное неравенство

$$\|\tilde{\xi} + \eta\|^2 \leqslant 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2, \tag{6.4}$$

которое эквивалентно тривиальному неравенству $\|\tilde{\xi} - \eta\|^2 \geqslant 0$.

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ случайных величин из пространства $\mathcal{H}$ сходится в *среднем квадратичном* к случайной величине $\xi \in \mathcal{H}$ и писать $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \xi$, если

$$M|\xi_n - \xi|^2 = \|\xi_n - \xi\|^2 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Далее мы часто не будем задавать условие $n = \overline{1, \infty}$ в обозначениях последовательностей (и писать, например, $\{\xi_n\}$), а также не будем указывать, что предельный переход совершается при $n \to \infty$ (и писать просто $\xi_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi$), в тех случаях, когда это не может вызывать непонимания. Если случайные величины рассматриваются как элементы пространства $\mathcal{H}$, то сходимость понимается исключительно как сходимость по норме этого пространства.

Важнейшим свойством пространства $\mathcal{H}$ является его полнота. Имеет место следующая теорема, которую мы оставим без доказательства.

Теорема 6.1. *Последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин из пространства $\mathcal{H}$ сходится к случайной величине $\xi \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда эта последовательность фундаментальна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $m, n > N$ имеет место неравенство $\|\xi_n - \xi_m\| < \epsilon$ (или, кратко, $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$ для всех $m, n \to \infty$).*

Докажем несколько простых утверждений о свойствах сходимости последовательностей из $\mathcal{H}$, которые часто будем использовать в дальнейшем.

Лемма 6.1. *Если $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{\xi_n\}$ ограничена, т. е. найдётся число $C \in \mathbb{R}$, такое что $\|\xi_n\| \leqslant C$ для всех $n = 1, 2, \dots$.*

Доказательство. Числовая последовательность $\|\xi_n - \xi\|$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к нулю, следовательно, ограничена. В силу неравенства треугольника

$$\|\xi_n\| \leqslant \|\xi_n - \xi\| + \|\xi\|$$

ограничена и последовательность $\|\xi_n\|$, $n = 1, 2, \dots$.

Лемма 6.2. *Если $\|\xi_n - \xi\| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Вновь применим неравенство треугольника

$$\|\xi\| \leqslant \|\xi - \xi_n\| + \|\xi_n\|, \qquad \|\xi_n\| \leqslant \|\xi_n - \xi\| + \|\xi\|,$$

откуда с учётом $\|\xi - \xi_n\| = \|\xi_n - \xi\|$ имеем

$$-\|\xi - \xi_n\| \leqslant \|\xi\| - \|\xi_n\| \leqslant \|\xi - \xi_n\| \quad \Longleftrightarrow \quad \big|\, \|\xi\| - \|\xi_n\| \,\big| \leqslant \|\xi - \xi_n\|,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемое утверждение.

Лемма 6.3. *Если $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|\tilde{\xi}_m - \xi\|^2 \to 0$ при $m \to \infty$, то $(\xi_n, \tilde{\xi}_m) \to (\xi, \xi)$ при $n, m \to \infty$.*

Доказательство. Запишем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
\big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m) - (\xi, \xi)\big| &= \big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m) - (\xi_n, \xi) + (\xi_n, \xi) - (\xi, \xi)\big| = \\
&= \big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m - \xi) + (\xi_n - \xi, \xi)\big| \leqslant \big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m - \xi)\big| + \big|(\xi_n - \xi, \xi)\big| \leqslant \\
&\leqslant \|\xi_n\| \cdot \|\tilde{\xi}_m - \xi\| + \|\xi_n - \xi\| \cdot \|\xi\|.
\end{aligned}$$

В силу условия $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1 такой, что

$$\|\xi_n - \xi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|\xi\|} \quad \text{при} \quad n > N_1.$$

Далее, по лемме 6.1 найдётся $C > 0$ такое, что $\|\xi_n\| \leqslant C$ для всех n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_2 такой, что

$$\|\tilde{\xi}_m - \xi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{при} \quad m > N_2.$$

Объединяя полученные неравенства получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = \max(N_1, N_2)$ такой, что

$$\big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m) - (\xi, \xi)\big| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N. \tag{6.5}$$

Лемма доказана.

Теперь докажем в некотором смысле обратное утверждение.

Лемма 6.4. *Если $(\xi_n, \xi_m) \to A$ при $n, m \to \infty$, где A – некоторое комплексное число, то последовательность $\{\xi_n\}$ имеет предел.*

Доказательство. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что $\bigl|(\xi_n, \xi_m) - A)\bigr| \leqslant \varepsilon$ для всех $n, m > N$. Тогда, конечно, $\bigl|(\xi_n, \xi_n) - A)\bigr| \leqslant \varepsilon$ для всех $n > N$, а это означает, что $\|\xi_n\|^2 \to A$ при $n \to \infty$. Видно, что число A с необходимостью действительное, $A = \bar{A}$. Следовательно,

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|\xi_n\|^2 - (\xi_n, \xi_m) - \overline{(\xi_n, \xi_m)} + \|\xi_m\|^2 \to A - A - A + A = 0, \quad n, m \to \infty;$$

другими словами, последовательность $\{\xi_n\}$ фундаментальна, поэтому имеет предел. Лемма доказана.

Теперь мы обрели необходимый математический инструмент для исследования случайных процессов.

Рассмотрим комплекснозначный случайный процесс $\xi(t) = \xi_{\mathrm{Re}}(t) + i\xi_{\mathrm{Im}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Назовём такой процесс гильбертовым, если для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение $\xi(t) \in \mathcal{H}$, т. е. $M\xi(t) = 0$ и $M|\xi(t)|^2 < \infty$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Если использовать структуру пространства $\mathcal{H}$, то для ковариационной функции такого процесса мы можем записать

$$R(t, s) = \operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s)) = M\xi(t)\overline{\xi(s)} = (\xi(t), \xi(s)), \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Далее, если иное не оговорено особо, мы рассматриваем гильбертовы случайные процессы.

Непрерывность в среднем квадратичном.

Определение 6.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *непрерывным в среднем квадратичном* (с.к.-непрерывным) в точке t, если $M|\xi(t+h) - \xi(t)|^2 \to 0$ при $h \to 0$, или, другими словами, для любой последовательности $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к нулю,

$$M|\xi(t+h_n) - \xi(t)|^2 = \|\xi(t+h_n) - \xi(t)\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6.6}$$

Далее мы свяжем с.к.-непрерывность с непрерывностью функции $R(\,\cdot\,)$. Напомним, $R(\,\cdot\,)$ как функция двух действительных переменных непрерывна в точке (t, s), если

$$\bigl|R(t + h_n, s + \tilde{h}_m) - R(t, s)\bigr| \to 0 \quad \text{при} \quad h_n \to 0, \quad \tilde{h}_m \to 0$$

(здесь сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ произвольны).

Теорема 6.2. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда функция $R(\,\cdot\,)$ непрерывна в точке (t, t).*

Доказательство. Выберем произвольным образом сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ и положим $\xi_n = \xi(t + h_n)$, $\tilde{\xi}_m = \xi(t + \tilde{h}_m)$ и $\xi = \xi(t)$.

Если случайный процесс с.к.-непрерывен в точке t, то независимо от выбора последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ мы имеем $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|\tilde{\xi}_m - \xi\|^2 \to 0$ при $m \to \infty$. В силу леммы 6.3

$$R(t + h_n, t + \tilde{h}_m) = (\xi_n, \tilde{\xi}_m) \to (\xi, \xi) = R(t, s) \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Наоборот, если для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$

$$\left|R(t+h_n, t+\tilde{h}_m) - R(t,t)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

то (при $\tilde{h}_m = h_m$ для всех m)

$$\|\xi_n\|^2 = (\xi_n, \xi_n) = R(t+h_n, t+h_n) \to R(t,t) = (\xi, \xi) = \|\xi\|^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а также (при $\tilde{h}_m = 0$ для всех m)

$$(\xi_n, \xi) = R(t+h_n, t) \to R(t,t) = \|\xi\|^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

Отсюда

$$\|\xi_n - \xi\|^2 = \|\xi_n\|^2 - (\xi_n, \xi) - \overline{(\xi_n, \xi)} + \|\xi\|^2 \to \|\xi\|^2 - \|\xi\|^2 - \|\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = 0,$$

другими словами, $M|\xi(t+h_n) - \xi(t)|^2 \to 0$ для любой сходящейся к нулю последовательности $\{h_n\}$.

Замечание 6.1. Если функция $R(\,\cdot\,)$ непрерывна в точках (t,t) и (s,s), то она непрерывна в точке (t,s). Чтобы это показать, выберем произвольные сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ и положим $\xi_n = \xi(t+h_n)$, $\tilde{\eta}_m = \xi(s+\tilde{h}_m)$ и $\xi = \xi(t)$, $\eta = \xi(s)$. Тогда $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$ и $\|\tilde{\eta}_m - \eta\|^2 \to 0$, следовательно (см. аналогичные выкладки в доказательстве леммы 6.3),

$$\begin{aligned}\left|R(t+h_n, s+\tilde{h}_m) - R(t,s)\right| &= \left|(\xi_n, \tilde{\eta}_m) - (\xi, \eta)\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|(\xi_n, \tilde{\eta}_m - \eta)\right| + \left|(\xi_n - \xi, \eta)\right| \leqslant \|\xi_n\| \cdot \|\tilde{\eta}_m - \eta\| + \|\xi_n - \xi\| \cdot \|\eta\| \to 0\end{aligned}$$

при $n, m \to \infty$.

Дифференцируемость в среднем квадратичном.

Определение 6.2. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *дифференцируемым в среднем квадратичном* (с.к.-дифференцируемым) в точке t, если существует случайная величина $\dot{\xi} = \dot{\xi}(t) \in \mathcal{H}$ такая, что

$$M\left|\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} - \dot{\xi}(t)\right|^2 = \left\|\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} - \dot{\xi}(t)\right\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{6.7}$$

или, другими словами, для любой последовательности $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к нулю, последовательность гильбертовых случайных величин $\frac{\xi(t+h_n) - \xi(t)}{h_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в среднем квадратичном смысле к некоторой случайной величине $\dot{\xi}(t) \in \mathcal{H}$.

Далее мы свяжем с.к.-дифференцируемость с дифференцируемостью функции $R(\,\cdot\,)$, точнее, с существованием её второй смешанной производной, которую мы определим так. Введём разностное отношение для $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\, \partial t}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(t,s)}{\partial t} &\approx \frac{R(t+h, s) - R(t,s)}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial R(t,s)}{\partial t} &\approx \frac{\partial R(t, s+\tilde{h})/\partial t - \partial R(t,s)/\partial t}{\tilde{h}} =\end{aligned}$$

$$= \frac{R(t+h, s+\tilde{h}) - R(t, s+\tilde{h}) - R(t+h, s) + R(t,s)}{h\tilde{h}}.$$

Будем говорить, что $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную[2] в точке (t,s), если для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ существует

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{R(t+h_n, s+\tilde{h}_m) - R(t, s+\tilde{h}_m) - R(t+h_n, s) + R(t,s)}{h_n\tilde{h}_m} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\,\partial t}. \qquad (6.8)$$

Теорема 6.3. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда функция $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную в точке (t,t).*

Доказательство. Выберем произвольные сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ и положим, как и выше, $\xi_n = \xi(t+h_n)$, $\tilde{\xi}_m = \xi(t+\tilde{h}_m)$ и $\xi = \xi(t)$. Кроме того, введём для краткости обозначения

$$\begin{gathered} D^{(2)}_{h_n,\tilde{h}_m} = \frac{R(t+h_n, t+\tilde{h}_m) - R(t, t+\tilde{h}_m) - R(t+h_n, t) + R(t,t)}{h_n\tilde{h}_m}, \\ \Delta_n = \frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n}, \qquad \widetilde{\Delta}_m = \frac{\xi(t+\tilde{h}_m)-\xi(t)}{\tilde{h}_m}. \end{gathered} \qquad (6.9)$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} D^{(2)}_{h_n,\tilde{h}_m} &= \frac{(\xi_n,\tilde{\xi}_m) - (\xi,\tilde{\xi}_m) - (\xi_n,\xi) + (\xi,\xi)}{h_n\tilde{h}_m} = \\ &= \frac{(\xi_n-\xi,\tilde{\xi}_m) - (\xi_n-\xi,\xi)}{h_n\tilde{h}_m} = \left(\frac{\xi_n-\xi}{h_n}, \frac{\tilde{\xi}_m-\xi}{\tilde{h}_m}\right) = (\Delta_n, \widetilde{\Delta}_m) \end{aligned} \qquad (6.10)$$

и

$$M\left|\frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n} - \dot{\xi}(t)\right|^2 = \|\Delta_n - \dot{\xi}\|^2, \qquad \dot{\xi} = \dot{\xi}(t).$$

Таким образом, если $\xi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, с.к.-дифференцируем в точке t, то для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ мы имеем сходимости

$$\|\Delta_n - \dot{\xi}\|^2 \to 0, \qquad \|\widetilde{\Delta}_m - \dot{\xi}\|^2 \to 0.$$

В силу леммы 6.3 с учётом (6.10) отсюда следует, что

$$D^{(2)}_{h_n,\tilde{h}_m} = (\Delta_n, \widetilde{\Delta}_m) \to (\dot{\xi},\dot{\xi}) \quad \text{при} \quad n,m\to\infty,$$

таким образом, существует

$$\frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\,\partial t} = (\dot{\xi},\dot{\xi}) = M\dot{\xi}(t)\overline{\dot{\xi}(t)}. \qquad (6.11)$$

[2] Заметим, что это определение несколько отличается от определения в математическом анализе, в частности, из нашего определения непосредственно вытекает, что если существует одна из смешанных производных, то существует и другая, причём обе производные, конечно, совпадают.

Наоборот, если для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$

$$D^{(2)}_{h_n,\tilde{h}_m} = (\Delta_n, \widetilde{\Delta}_m) \to \frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\,\partial t} \quad \text{при} \quad n, m \to \infty, \tag{6.12}$$

то (при $\tilde{h}_m = h_m$ для всех m) мы получаем

$$\|\Delta_n\|^2 = (\Delta_n, \Delta_n) \to \frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\,\partial t} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6.13}$$

При этом

$$\|\Delta_n - \Delta_m\|^2 = \|\Delta_n\|^2 - (\Delta_n, \Delta_m) - \overline{(\Delta_n, \Delta_m)} + \|\Delta_m\|^2. \tag{6.14}$$

Видно, что каждое слагаемое в правой части этого равенства при $n, m \to \infty$ стремится к $\frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\,\partial t}$ (эта величина действительна в силу (6.13)). Поэтому последовательность $\{\Delta_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел.

Покажем, что предел не зависит от выбора последовательности $\{\Delta_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$.

Выберем две сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$. Тогда на основании проведённых выше рассуждений мы можем заключить, что существуют некоторые случайные величины $\dot{\xi}, \dot{\tilde{\xi}} \in \mathcal{H}$ такие, что $\Delta_n \to \dot{\xi}$ при $n \to \infty$ и $\widetilde{\Delta}_m \to \dot{\tilde{\xi}}$ при $m \to \infty$. При этом мы имеем условие (6.12) для этих последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$. Кроме того, из того же условия (6.12) дифференцируемости ковариационной функции следует, что

$$D^{(2)}_{h_n,h_n} = (\Delta_n, \Delta_n) \to \frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\,\partial t}, \qquad D^{(2)}_{\tilde{h}_m,\tilde{h}_m} = (\widetilde{\Delta}_m, \widetilde{\Delta}_m) \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Отсюда аналогично (6.14) имеем $\|\Delta_n - \widetilde{\Delta}_m\|^2 \to 0$ при $n, m \to \infty$ и

$$\|\dot{\xi} - \dot{\tilde{\xi}}\| \leqslant \|\dot{\xi} - \Delta_n\| + \|\Delta_n - \widetilde{\Delta}_m\| + \|\widetilde{\Delta}_m - \dot{\tilde{\xi}}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

а это возможно, если и только если $\|\dot{\xi} - \dot{\tilde{\xi}}\|^2 = 0$, т. е. $\dot{\xi} = \dot{\tilde{\xi}}$ с вероятностью единица.

Замечание 6.2. Можно показать, что если функция $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную в точках (t,t) и (s,s), то она имеет вторую смешанную производную в точке (t,s). Для этого достаточно доказать фундаментальность двухиндексной числовой последовательности

$$D^{(2)}_{h_n,\tilde{h}_m}(t,s) = \frac{R(t+h_n, s+\tilde{h}_m) - R(t, s+\tilde{h}_m) - R(t+h_n, s) + R(t,s)}{h_n \tilde{h}_m},$$

при $h_n \to 0$, $\tilde{h}_m \to 0$. Формулы, которые при этом используются, хотя и несложные, но достаточно громоздкие, поэтому мы не будем приводить доказательство сделанного утверждения.

Интегрируемость в среднем квадратичном. Рассмотрим проблему с.к.-интегрируемости случайного процесса $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на отрезке $[a,b]$. Построим интегральную сумму (случайную величину)

$$\Upsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)(t_k - t_{k-1}), \tag{6.15}$$

где два набора точек разбиения $t_0, t_1, \ldots, t_n$ и выборочных точек $t_1^*, \ldots, t_n^*$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (t_k - t_{k-1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \\ t_{k-1} \leqslant t_k^* \leqslant t_k, \qquad k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Определение 6.3. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *интегрируемым в среднем квадратичном* (с.к.-интегрируемым) на отрезке $[a, b]$, если существует случайная величина $\Upsilon \in \mathcal{H}$ такая, что для любого разбиения и для любого набора выборочных точек, удовлетворяющих условиям (6.16),

$$M\left|\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) - \Upsilon\right|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) - \Upsilon\right\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6.17}$$

Теперь свяжем с.к.-интегрируемость случайного процесса и интегрируемость его ковариационной функции. Будем говорить, что функция $R(\,\cdot\,)$ интегрируема в квадрате $[a, b] \times [a, b]$, если для любых двух разбиений $\{t_k\}_{k=\overline{0,n}}$ и $\{s_j\}_{j=\overline{0,m}}$ и соответствующих двух наборов выборочных точек $\{t_k^*\}_{k=\overline{1,n}}$ и $\{s_j^*\}_{j=\overline{1,m}}$, удовлетворяющих условиям (6.16),

$$I_{n,m} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} R(t_k^*, s_j^*) \Delta t_k \Delta s_j \underset{n,m' \to \infty}{\longrightarrow} I \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b \int_a^b R(t, s)\, dt\, ds. \tag{6.18}$$

Теорема 6.4. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-интегрируем на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда функция $R(\,\cdot\,)$ интегрируема в квадрате $[a, b] \times [a, b]$.*

Доказательство. Пусть случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-интегрируем на отрезке $[a, b]$. Тогда по определению $\|\Upsilon_n - \Upsilon\| \to 0$ при $n \to \infty$, причём предел не зависит от выбора точек разбиения $t_0, t_1, \ldots, t_n$ и выборочных точек $t_1^*, \ldots, t_n^*$. С учётом леммы 6.3 отсюда следует, что если случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ с.к.-интегрируем на отрезке $[a, b]$, то для любых двух разбиений $\{t_k\}_{k=\overline{0,n}}$ и $\{s_j\}_{j=\overline{0,m}}$ и соответствующих двух наборов выборочных точек $\{t_k^*\}_{k=\overline{1,n}}$ и $\{s_j^*\}_{j=\overline{1,m}}$, удовлетворяющих условиям (6.16), имеет место сходимость $(\Upsilon_n, \widetilde{\Upsilon}_m) \to (\Upsilon, \Upsilon)$ при $n, m \to \infty$, где

$$\Upsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)(t_k - t_{k-1}), \qquad \widetilde{\Upsilon}_m = \sum_{j=1}^{m} \xi(s_j^*)(s_j - s_{j-1}). \tag{6.19}$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} R(t_k^*, s_j^*) \Delta t_k \Delta s_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M\xi(t_k^*)\overline{\xi(s_j^*)} \Delta t_k \Delta s_j = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\xi_k^*, \tilde{\xi}_j^*) \Delta t_k \Delta s_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \Delta t_k, \sum_{j=1}^{m} \tilde{\xi}_j^* \Delta s_j\right) = (\Upsilon_n, \widetilde{\Upsilon}_m). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_a^b \int_a^b R(t, s)\, dt\, ds \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{m,n \to \infty} I_{n,m} = (\Upsilon, \Upsilon).$$

Наоборот, если для любых для любых двух разбиений $\{t_k\}_{k=\overline{0,n}}$ и $\{s_j\}_{j=\overline{0,m}}$ и соответствующих двух наборов выборочных точек $\{t_k^*\}_{k=\overline{1,n}}$ и $\{s_j^*\}_{j=\overline{1,m}}$, удовлетворяющих условиям (6.16), имеет место сходимость $I_{n,m} = (\Upsilon_n, \widetilde{\Upsilon}_m) \to I$ при $n, m \to \infty$, то

$$\|\Upsilon_n - \Upsilon_m\|^2 = \|\Upsilon_n\|^2 - (\Upsilon_n, \Upsilon_m) - \overline{(\Upsilon_n, \Upsilon_m)} + \|\Upsilon_m\|^2 \underset{n,m'\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.20}$$

Таким образом, последовательность $\{\Upsilon_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел. Осталось показать, что этот предел не зависит от выбора разбиения и точек на сегментах разбиения.

Возьмём два набора точек разбиения $\{t_k\}_{k=\overline{0,n}}$ и $\{\tilde{t}_j\}_{j=\overline{0,\tilde{n}}}$ и два соответствующих двух набора выборочных точек $\{t_k^*\}_{k=\overline{1,n}}$ и $\{\tilde{t}_j^*\}_{j=\overline{1,\tilde{n}}}$, удовлетворяющих условиям (6.16). Тогда соответствующие им интегральные суммы Υ_n и $\widetilde{\Upsilon}_n$ из (6.17) удовлетворяют условиям $\Upsilon_n \to \Upsilon$ при $n \to \infty$ и $\widetilde{\Upsilon}_m \to \widetilde{\Upsilon}$ при $m \to \infty$. При этом в силу соотношений, полностью аналогичных (6.20) (с заменой Υ_m на $\widetilde{\Upsilon}_m$), получаем, что

$$\|\Upsilon_n - \widetilde{\Upsilon}_m\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Отсюда

$$\|\Upsilon - \widetilde{\Upsilon}\|^2 \leqslant 2\|\Upsilon - \Upsilon_n\|^2 + 2\|\Upsilon_n - \widetilde{\Upsilon}_m\|^2 + 2\|\widetilde{\Upsilon}_m - \widetilde{\Upsilon}\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

а это возможно, если и только если $\|\Upsilon - \widetilde{\Upsilon}\|^2 = 0$, т. е. $\Upsilon = \widetilde{\Upsilon}$ с вероятностью единица.

Случай ненулевого математического ожидания случайного процесса. Обобщим полученные теоремы на случай, когда $M\xi(t) = \mu(t) \not\equiv 0$, сохранив условие $M|\xi(t) - \mu(t)|^2 < \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Положим $\xi^\circ(t) = \xi(t) - \mu(t)$, тогда $\xi^\circ(t) \in \mathcal{H}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и, очевидно,

$$R(t,s) = \operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s)) = M\xi^\circ(t)\overline{\xi^\circ(s)} = (\xi^\circ(t), \xi^\circ(s)) = \operatorname{cov}(\xi^\circ(t), \xi^\circ(s)) = R^\circ(t,s),$$

где $R^\circ(\,\cdot\,)$ – ковариационная функция процесса $\xi^\circ(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Новые теоремы достаточно просто получаются из предыдущих, если принять во внимание следующие два замечания.

Замечание 6.3. Пусть последовательность $\{\xi_n^\circ\} \subset \mathcal{H}$ (в частности, $M\xi^\circ = 0$ для всех n), а $\{\mu_n\}$ – произвольная неслучайная последовательность комплексных чисел. Тогда

$$M|\xi_n^\circ + \mu_n|^2 = M|\xi_n^\circ|^2 + \mu_n \cdot M\xi_n^\circ + \overline{\mu_n \cdot M\xi_n^\circ} + |\mu_n|^2 = M|\xi_n^\circ|^2 + |\mu_n|^2,$$

отсюда $M|\xi_n^\circ + \mu_n|^2 \to 0$ если и только если $\xi_n^\circ \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$ и $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание 6.4. Для любой случайной величины α место тривиальная цепочка неравенств

$$|M\alpha| \leqslant M|\alpha| \leqslant \sqrt{M|\alpha|^2}, \tag{6.21}$$

где последнее эквивалентно тривиальному неравенству $D|\alpha| = M|\alpha|^2 - (M|\alpha|)^2 \geqslant 0$. На основании (6.21) мы можем утверждать, что если $\xi_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{с.к.}}} \xi$, то

$$|M\xi_n - M\xi| = |M(\xi_n - \xi)| \leqslant \sqrt{M|\xi_n - \xi|^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

другими словами, $M\xi_n \to M\xi$. Кроме того, из (6.21) вытекает, что если $M|\xi|^2 < \infty$, то $M\xi$ тоже существует и $|M\xi|^2 \leqslant M|\xi|^2$.

Исследуем с.к.-непрерывность случайного процесса. В силу сделанного выше замечания мы можем переписать приращение в (6.6) как

$$\begin{aligned} M|\xi(t+h_n)-\xi(t)|^2 &= M|\xi^\circ(t+h_n)-\xi^\circ(t)+(\mu(t+h_n)-\mu(t)|^2 = \\ &= M|\xi^\circ(t+h_n)-\xi^\circ(t)|^2+|\mu(t+h_n)-\mu(t)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда $\xi(t+h_n)\xrightarrow{\text{с.к.}}\xi(t)$ тогда и только тогда, когда выполнются два условия:

- $\xi(t+h_n^\circ)\xrightarrow{\text{с.к.}}\xi^\circ(t)$,
- $\mu(t+h_n)\to\mu(t)$ при $n\to\infty$.

Таким образом, в силу совпадения ковариационных функций $R(\,\cdot\,)$ и $R^\circ(\,\cdot\,)$ мы получаем обобщение доказанной теоремы 6.2.

Теорема 6.5. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, с ненулевым математическим ожиданием $\mu(t)$, $t\in\mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: функция $R(\,\cdot\,)$ непрерывна в точке (t,t) и функция $\mu(\,\cdot\,)$ непрерывна в точке t.*

Для с.к.-дифференцируемости рассуждения аналогичны, но немного сложнее. Введём дифференциальные отношения

$$\Delta_n=\frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n},\qquad \Delta_n^\circ=\frac{\xi^\circ(t+h_n)-\xi^\circ(t)}{h_n},\qquad DM_n=\frac{\mu(t+h_n)-\mu(t)}{h_n}.$$

Тогда $\Delta_n-\Delta_m=\Delta_n^\circ-\Delta_m^\circ+DM_n-DM_m$ и

$$M|\Delta_n-\Delta_m|^2=M|\Delta_n^\circ-\Delta_m^\circ|^2+|DM_n-DM_m|^2.$$

В результате последовательность $\{\Delta_n\}$ с.к.-фундаментальна (или, что эквивалентно, сходится) тогда и только тогда, когда выполнены оба условия: последовательность $\{\Delta_n^\circ\}$ с.к.-фундаментальна (сходится) и числовая последовательность $\{\mu_n\}$ фундаментальна (сходится). Таким образом мы получаем обобщение доказанной теоремы 6.3.

Теорема 6.6. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, с ненулевым математическим ожиданием $\mu(t)$, $t\in\mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: функция $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную в точке (t,t) и функция $\mu(\,\cdot\,)$ дифференцируема в точке t.*

При этом операции взятия с.к.-производной и вычисления математического ожидания можно менять местами:

$$M\dot\xi(t)=\frac{d}{dt}M\xi(t).$$

Действительно, если $\Delta_n\xrightarrow{\text{с.к.}}\dot\xi$ при $h_n\to 0$, то в силу замечания 6.4 $M\Delta_n\to M\dot\xi$, следовательно,

$$M\dot\xi(t)=\lim_{n\to\infty}M\Delta_n=\lim_{n\to\infty}M\frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(t+h_n)-\mu(t)}{h_n}=\dot\mu(t).\quad(6.22)$$

Обобщение теоремы 6.4 о с.к.-интегрируемости получается совершенно аналогично теореме о с.к.-дифференцируемости. Нужно только заменить дифференциальные отношения на интегральные суммы Дарбу:

$$\Upsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)\Delta t_k, \qquad \Upsilon_n^\circ = \sum_{k=1}^{n} \xi^\circ(t_k^*)\Delta t_k, \qquad IM_n = \sum_{k=1}^{n} \mu(t_k^*)\Delta t_k.$$

Тогда $\Upsilon_n - \Upsilon_m = \Upsilon_n^\circ - \Upsilon_m^\circ + IM_n - IM_m$, и далее мы аналогично предыдущим рассуждениям получаем теорему.

Теорема 6.7. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с ненулевым математическим ожиданием $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-интегрируем на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: функция $R(\,\cdot\,)$ интегрируема в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ и функция $\mu(\,\cdot\,)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

Аналогично (6.22) мы получаем, что

$$M \int_a^b \xi(t)\, dt = \int_a^b M\xi(t)\, dt.$$

7. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕРА И ИНТЕГРАЛ ПО ЭТОЙ МЕРЕ

Пусть на числовой прямой выбран и фиксирован конечный интервал $[a,b)$ ненулевой длины. Рассмотрим семейство $\mathbb{D}$ всевозможных интервалов $\Delta x = [x_1, x_2) \subset [a,b)$ и отвечающее ему семейство случайных величин

$$Z(\Delta x)\colon \Omega \to \mathbb{C}, \qquad \Delta x \in \mathbb{D},$$

т. е. в сущности некий специфический (по своему аргументу) случайный процесс.

Определение 7.1. Семейство случайных величин $Z(\Delta x)$, $\Delta x \in \mathbb{D}$, назовём *ортогональной стохастической мерой*, если оно удовлетворяет следующим условиям.

• Существуют моменты первого и второго порядка

$$MZ(\Delta x) = 0, \qquad D(\Delta x) = M|Z(\Delta x)|^2 < \infty, \tag{7.1}$$

другими словами, $Z(\Delta x) \in \mathcal{H}$ (гильбертова случайная величина). Назовём функцию

$$m(\,\cdot\,)\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+, \qquad m(\Delta x) = M|Z(\Delta x)|^2, \tag{7.2}$$

структурной функцией.

• Если $\Delta x_1 \cap \Delta x_2 = \varnothing$, то

$$\operatorname{cov}(Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2)) = MZ(\Delta x_1)\overline{Z(\Delta x_2)} = 0, \tag{7.3}$$

последнее равенство можно записать как $(Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2) = 0$, что объясняет слово «ортогональная» в названии меры.

• Если интервал Δx представи́м как объединение двух непересекающихся[3)] интервалов, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$, то с вероятностью единица

$$Z(\Delta x) = Z(\Delta x_1) + Z(\Delta x_2) \tag{7.4}$$

(аддитивность с вероятностью единица);

• если интервал Δx представи́м как объединение счётного числа непересекающихся интервалов, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots$, то $M|Z(\Delta x)|^2 < \infty$ и в среднем квадратичном

$$Z(\Delta x) = Z(\Delta x_1) + Z(\Delta x_2) + \cdots ,$$

другими словами,

$$M\left|Z\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Delta x_k\right) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta x_k)\right|^2 = \left\|Z\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Delta x_k\right) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta x_k)\right\|^2 \to 0, \qquad n \to \infty \tag{7.5}$$

(счётная аддитивность в среднем квадратичном смысле);

Введённая стохастическая мера не является неотрицательной, более того, её значения комплексны. Привычным свойствам меры удовлетворяет спектральная функция $m(\,\cdot\,)$, заданная в (7.2).

[3)] Отсутствие пересечения мы, как обычно в теории вероятностей, подчёркиваем, применяя знак плюс вместо знака объединения множеств.

Из сформулированных выше свойств (7.4) и (7.3) вытекает, что структурная функция обладает свойством аддитивности: если $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$ для непересекающихся интервалов Δx_1 и Δx_2, то мы имеем

$$
\begin{aligned}
m(\Delta x) &= M|Z(\Delta x)|^2 = \|Z(\Delta x_1 + \Delta x_2)\|^2 = \|Z(\Delta x_1) + Z(\Delta x_2)\|^2 = \\
&= \|Z(\Delta x_1)\|^2 + (Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2)) + \overline{(Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2))} + \|Z(\Delta x_2)\|^2 = \\
&= \|Z(\Delta x_1)\|^2 + \|Z(\Delta x_2)\|^2 = M|Z(\Delta x_1)|^2 + M|Z(\Delta x_2)|^2 = m(\Delta x_1) + m(\Delta x_2).
\end{aligned}
$$

Отсюда очевидным образом следует аддитивность меры для $\Delta x = \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n$ при любом конечном числе попарно не пересекающихся интервалов $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$:

$$
m(\Delta x) = M\left|Z\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k\right)\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} M|Z(\Delta x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} m(\Delta x_k). \tag{7.6}
$$

Опираясь на требование (7.5), получим счётную аддитивность функции $m(\,\cdot\,)$. Пусть $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots$. Введём для краткости следующие обозначения для случайных величин:

$$
\zeta \stackrel{\text{def}}{=} Z(\Delta x) = Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k\right), \qquad \zeta_n \stackrel{\text{def}}{=} Z\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta x_k). \tag{7.7}
$$

Тогда по определению структурной функции

$$
M|\zeta|^2 = m(\Delta x), \qquad M|\zeta_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} M|Z(\Delta x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} m(\Delta x_k).
$$

Условие (7.5) в этих обозначениях записывается как

$$
M|\zeta - \zeta_n|^2 = \|\zeta - \zeta_n\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.
$$

В предыдущем разделе мы ползали, что такая сходимость влечёт $\|\zeta\| \to \|\zeta_n\|$ или, что эквивалентно, $M|\zeta_n|^2 \to M|\zeta|^2$ при $n \to \infty$. В терминах структурной функции это означает, что

$$
m(\Delta x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(\Delta x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta x_k).
$$

Таким образом, спектральная функция $m(\,\cdot\,)$, заданная на множестве всех конечных подынтервалов интервала $[a, b)$, обладает свойствами счётно-аддитвной меры, которые аналогичны свойствам длины или вероятности. В этом случае можно доопределить функцию $m(\,\cdot\,)$ на все подмножества интервала $[a, b)$, которые представимы как конечные или счётные объединения непересекающихся интервалов $\Delta x \in \mathbb{D}$. В результате получим, что $m(\,\cdot\,)$ – счётно-аддитивная мера на сигма-алгебре борелевских подмножеств интервала $[a, b)$.

Интеграл по случайной мере. Пусть задана спектральная мера $Z(|\Delta x)$ со структурной функцией $m(\Delta x)$, $m(\Delta x) \subset [a, b)$. Введём линейное пространство $\mathcal{L}^2$ функций, действующих из $[a, b)$ в $\mathbb{C}$, и зададим в нём скалярное произведение и норму равенствами

$$
(g_1, g_2) = \int_a^b g_1(x)\overline{g_2(x)}\, dF(x), \qquad \|g\|^2 = \int_a^b |g(x)|^2\, dF(x),
$$

где $F(\,\cdot\,)$ – некоторая действительнозначная неотрицательная (в нашем курсе кусочно-непрерывная) неубывающая функция, от которой мы потребуем выполнения следующего условия для любого $\Delta x = [x_1, x_2) \subset [a, b)$

$$m(\Delta x) = \int_{\Delta x} dF(x) = F(x_2) - F(x_1). \tag{7.8}$$

Интегралы в этих равенствах полностью аналогичны интегралу, определяющему математическое ожидание (интеграл Лебега–Стилтьеса).

Заметим, что мы не помечаем скалярное произведение и норму никакими значками, по которым их можно отличить от скалярного произведения в $\mathcal{H}$. Предполагается, что природа элементов, для которых вычисляются скалярные произведения или нормы, должна подсказать, в каком пространстве мы работаем.

Имеет место следующая теорема о полноте пространства $\mathcal{L}^2$, которую, как и теорему для пространства $\mathcal{H}$, мы оставим без доказательства.

Теорема 7.1. *Последовательность $\{g_n\}$ функций из пространства $\mathcal{L}^2$ сходится к функции $g \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $m, n > N$ имеет место неравенство $\|g_n - g_m\| < \epsilon$ (или, кратко, $\|g_n - g_m\| \to 0$ для всех $m, n \to \infty$).*

Построение интеграла начнём, как обычно, с интеграла от простых функций. Рассмотрим разбиение интервала $[a, b)$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и функцию $g(\,\cdot\,)\colon [a, b) \to \mathbb{C}$, кусочно-постоянную на интервалах $\Delta x_k = [x_{k-1}, x_k)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, \chi_k(x), \qquad \chi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta x_k, \\ 0, & x \notin \Delta x_k. \end{cases}$$

Для такой функции положим по определению

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)\, Z_\xi(dx) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, Z_\xi(\Delta x_k).$$

Очевидно, что $M\mathcal{I} = 0$ в силу $MZ_\xi(\Delta x_k) = 0$.

Отметим, что кусочно-постоянные функции образуют в $\mathcal{L}^2$ линейное многообразие, т. е. линейная комбинация двух кусочно-постоянных функций также является кусочно-постоянной на более мелких интервалах разбиения. Для интервалов постоянства линейной комбинации $ag(x)+bh(x)$ множество точек разбиения представляет собой объединение точек разбиения для каждого из двух слагаемых $g(x)$ и $h(x)$.

Лемма 7.1. *Пусть*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, \chi_k(x), \qquad \mathcal{I} = \sum_{k=1}^{n} g_k\, Z_\xi(\Delta x_k).$$

Тогда при выполнении равенства (7.8)

$$\|\mathcal{I}\|^2 = \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x), \tag{7.9}$$

где нормы случайной величины $\mathcal{I}$ и функции g определены соответственно в пространствах $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{H}$.

Доказательство. Вычислим указанные нормы. Имеем

$$\|\mathcal{I}\|^2 \overset{\text{def}}{=\!=} M|\mathcal{I}|^2 = M\left|\sum_{k=1}^{n} g_k Z_\xi(\Delta x_k)\right|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k Z_\xi(\Delta x_k)\right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 \|Z_\xi(\Delta x_k)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 \cdot M|Z_\xi(\Delta x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 m(\Delta x_k),$$

где мы воспользовались ортогональностью меры. Учтём формулу (7.8), получим

$$\|\mathcal{I}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 m(\Delta x_k) = \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 \int_{\Delta x_k} dF_\xi(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x). \tag{7.10}$$

С другой стороны,

$$\|g\|^2 \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b |g(x)|^2\, dF_\xi(x) = \int_a^b \left|\sum_{k=1}^{n} g_k \chi_k(x)\right|^2 dF_\xi(x) =$$

$$= \sum_{k,\tilde{k}=1}^{n} \int_a^b g_k \bar{g}_{\tilde{k}}\, \chi_k(x) \overline{\chi_{\tilde{k}}(x)}\, dF_\xi(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b |g_k|^2 \chi_k(x)\, dF_\xi(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x), \tag{7.11}$$

где мы учли, что $\tilde{\chi}_k(x)\overline{\tilde{\chi}_{\tilde{k}}(x)} \equiv 0$ при $k \neq \tilde{k}$, а при $k = \tilde{k}$

$$\int_a^b |g_k|^2 |\chi_k(x)|^2\, dF_\xi(x) = \int_a^b |g_k|^2 \chi_k(x)\, dF_\xi(x) = \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x).$$

Сравнивая правые части равенств (7.10) и (7.11), получаем (7.9). Лемма доказана.

Перейдём к построению интеграла от функции более общего вида. Пусть функция $g(\cdot)\colon [a, b) \to \mathbb{C}$ представима как предел по норме пространства $\mathcal{L}^2$,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x), \tag{7.12}$$

где функции $g_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$, кусочно-постоянные. Тогда $\|g_n - g_m\|^2 \to 0$ при $n, m \to \infty$. Поскольку функция $g_n - g_m$ кусочно-постоянная, к ней мы можем применить лемму 7.9: если $\mathcal{I}_n = \int_a^b g_n(x)\, Z_\xi(dx)$, то

$$\|\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_m\|^2 = \|g_n - g_m\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty$$

(заметим, что здесь первая норма задана в пространстве $\mathcal{H}$, а вторая – в пространстве $\mathcal{L}^2$). Из полноты пространства $\mathcal{H}$ вытекает что существует случайная величина $\mathcal{I}$, которую естественно назвать интегралом от функции $g(\cdot)$ по стохастической мере:

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)\, Z_\xi(dx) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, Z_\xi(dx) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n. \tag{7.13}$$

Для аккуратного завершения построения интеграла по случайной мере следует доказать, что предел в (7.13) не зависит от представления функции $g(\cdot)$ в виде предела кусочно-постоянных функций. Это вытекает из следующих простейших рассуждений. Пусть

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n,$$

другими словами, $\|g - g_n\| \to 0$ и $\|g - \tilde{g}_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, как показано выше, при $n \to \infty$ имеют место сходимости в пространстве $\mathcal{H}$

$$\mathcal{I}_n = \int_a^b g_n(x)\, Z_\xi(dx) \to \mathcal{I}, \qquad \tilde{\mathcal{I}}_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b \tilde{g}_n(x)\, Z_\xi(dx) \to \tilde{\mathcal{I}},$$

где $\mathcal{I}$ и $\tilde{\mathcal{I}}$ – некоторые случайные величины.

Заметим, что

$$\|g_n - \tilde{g}_n\|^2 \leqslant 2\|g_n - g\|^2 + 2\|g - \tilde{g}_n\|^2 \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{7.14}$$

При этом функция $g_n - \tilde{g}_n$ кусочно-постоянная, поэтому $\|\mathcal{I}_n - \tilde{\mathcal{I}}_n\| = \|g_n - \tilde{g}_n\|$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 &\leqslant 2\|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n\|^2 + 2\|\mathcal{I}_n - \tilde{\mathcal{I}}_n\|^2 + 2\|\tilde{\mathcal{I}}_n - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 = \\ &= 2|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n\|^2 + 2\|g_n - \tilde{g}_n\|^2 + 2\|\tilde{\mathcal{I}}_n - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Это возможно, только если $\|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 = 0$. В силу неравенства Чебышёва

$$P(|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}| > \varepsilon) \leqslant \frac{M|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}|^2}{\varepsilon^2} = \frac{\|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}\|^2}{\varepsilon^2} = 0,$$

для любого $\varepsilon > 0$, тем самым $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$ с вероятностью единица.