ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2026 г.

I. Программа курса

Ниже приведены вопросы программы и их краткое содержание.

1. Понятие предела последовательности событий как множеств элементарных исходов:
   - определение верхнего и нижнего пределов последовательностей множеств;
   - существование предела монотонных (по включению) последовательностей множеств.
2. Алгебры и сигма-алгебры событий:
   - событие как подмножество множества элементарных исходов, операции объединения, пересечения и дополнения, их свойства;
   - определения и свойства алгебр и сигма-алгебр подмножеств множества Ω, примеры.
3. Аксиомы вероятности и следствия из них:
   - простейшие следствия из аксиом: вероятность дополнения к событию, вероятность объединения событий, монотонность вероятности относительно включения множеств;
   - теоремы о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
4. Условная вероятность:
   - вероятностное пространство условной вероятности (аксиоматическое определение);
   - свойства условной вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.
5. Независимость событий:
   - определение попарной и совокупной независимости;
   - свойства независимых событий.
6. Биномиальная схема независимых испытаний:
   - вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний, аксиоматическое определение;
   - биномиальное распределение и отрицательное биномиальное распределение;
   - теорема Пуассона.
7. Понятие случайной величины:
   - определение случайной величины, функция распределения, плотность вероятности;
   - дискретное и абсолютно непрерывное распределения;
   - свойства функции распределения: монотонность, предельные значения при $x \to \pm\infty$, непрерывность, $P(\xi = x)$ как скачкок функции распределения.
8. Понятие многомерной случайной величины, независимость случайных величин:
   - совместная функция распределения, совместная плотность вероятности;
   - независимость случайных величин попарная и в совокупности;
   - формула для плотности вероятности суммы двух независимых абсолютно непрерывно распределённых случайных величин.
9. Условные распределения и условные плотности распределения:
   - понятие условной функции распределения, условное распределение одной случайной величины при фиксированном значении другой случайной величины (дискретный и абсолютно непрерывный случаи);
   - формула полной вероятности и формула Байеса для условных плотностей вероятности.
10. Математическое ожидание:
    - определение математического ожидания случайной величины;
    - свойства математического ожидания сумм и произведений случайных величин;

— неравенство Чебышёва.

— неравенство Коши–Буняковского для моментов случайных величин;

— условное математическое ожидание.

11. Дисперсия и коэффициент ковариации (ковариация):

    — определение дисперсии случайной величины и матрицы ковариаций случайного вектора;

    — свойства дисперсии и матрицы ковариаций;

    — коэффициент корреляции (корреляция), его свойства.

12. Характеристические функции и их свойства.

    — определение и простейшие свойства: характеристическая функция суммы независимых случайных величин, связь производных характеристической функции с начальными моментами случайной величины, преобразование характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины;

    — теорема о связи сходимости последовательности характеристических функций со сходимостью по распределению (без доказательства).

13. Сходимости последовательностей случайных величин:

    — сходимости последовательностей случайных величин с вероятностью единица (почти наверное), по вероятности, по распределению, в среднем квадратичном;

    — лемма Бореля–Кантелли, достаточное условие сходимости с вероятностью единица.

14. Законы больших чисел:

    — закон больших чисел в форме Чебышёва, теорема Бернулли;

    — усиленный закон больших чисел.

15. Центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра–Лапласа.

16. Процесс Пуассона:

    — многомерное распределение процесса Пуассона,

    — математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,

    — теорема о том, что пуассонов поток требований есть процесс Пуассона.

17. Процесс Винера:

    — многомерная плотность вероятности процесса Винера,

    — математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,

    — процесс Винера как предел дискретных симметричных случайных блужданий,

    — аналитические свойства траекторий процесса Винера (без доказательства свойств, выполняющихся с вероятностью единица).

18. Цепи Маркова конечным числом состояний и однородной матрицей перехода:

    — матрицы перехода за один и n шагов,

    — уравнение Чепмена–Колмогорова,

    — финальные вероятности, теорема Маркова о достаточном условии существования финальных вероятностей (без доказательства),

    — эргодическое свойство, равенство «среднего по ансамблю» и «среднего по времени».

19. Марковские процессы с конечным числом состояний и однородной матрицей перехода:

    — дифференциальные уравнения Колмогорова для матрицы перехода (без обоснования дифференцируемости матрицы перехода как функции от времени),

    — дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

Список литературы

[1] Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарёв, «Теория вероятностей, Математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков», М.: МГУ, 2010.

[2] Б. В. Гнеденко, «Курс теории вероятнстей», М.: Едиториал УРСС, 2005.

[3] А. Н. Ширяев, «Вероятность», М.: МЦНОМО, 2004.

[4] Материалы на сайте кафедры математического моделирования и информатики, `http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/probability`.