# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2024 г.

## I. Программа курса

*Ниже приведены вопросы программы и их краткое содержание.*

1. Понятие предела последовательности событий как множеств элементарных исходов:
   - определение верхнего и нижнего пределов последовательностей множеств;
   - существование предела монотонных (по включению) последовательностей множеств.
2. Алгебры и сигма-алгебры событий:
   - событие как подмножество множества элементарных исходов, операции объединения, пересечения и дополнения, их свойства;
   - определения и свойства алгебр и сигма-алгебр подмножеств множества $\Omega$, примеры.
3. Аксиомы вероятности и следствия из них:
   - простейшие следствия из аксиом: вероятность дополнения к событию, вероятность объединения событий, монотонность вероятности относительно включения множеств;
   - теоремы о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
4. Условная вероятность:
   - вероятностное пространство условной вероятности (аксиоматическое определение);
   - свойства условной вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.
5. Независимость событий:
   - определение попарной и совокупной независимости;
   - свойства независимых событий.
6. Биномиальная схема независимых испытаний:
   - вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний, аксиоматическое определение;
   - биномиальное распределение и отрицательное биномиальное распределение;
   - теорема Пуассона.
7. Понятие случайной величины:
   - определение случайной величины, функция распределения, плотность вероятности;
   - дискретное и абсолютно непрерывное распределения;
   - свойства функции распределения: монотонность, предельные значения при $x \to \pm\infty$, непрерывность, $P(\xi = x)$ как скачков функции распределения.
8. Понятие многомерной случайной величины, независимость случайных величин:
   - совместная функция распределения, совместная плотность вероятности;
   - независимость случайных величин попарная и в совокупности;
   - формула для плотности вероятности суммы двух независимых абсолютно непрерывно распределённых случайных величин.
9. Многомерные нормальные случайные величины и функции от них:
   - нормальные случайные векторы с независимыми координатами;
   - свойство сохранения нормального распределения при преобразовании базиса пространства;
   - распределения хи-квадрат (Пирсона) и Стьюдента;
   - распределения функций от независимых нормальных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - \mu)}{\sqrt{\sigma^2}}, \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)^2, \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2, \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - \mu)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2}}.$$

10. Условные распределения и условные плотности распределения:
    - понятие условной функции распределения, условное распределение одной случайной величины при фиксированном значении другой случайной величины (дискретный и абсолютно непрерывный случаи);
    - формула полной вероятности и формула Байеса для условных плотностей вероятности.
11. Математическое ожидание:
    - определение математического ожидания случайной величины;
    - свойства математического ожидания сумм и произведений случайных величин;
    - неравенство Чебышёва.
    - неравенство Коши–Буняковского для моментов случайных величин;
    - условное математическое ожидание.
12. Дисперсия и коэффициент ковариации (ковариация):
    - определение дисперсии случайной величины и матрицы ковариаций случайного вектора;
    - свойства дисперсии и матрицы ковариаций;
    - коэффициент корреляции (корреляция), его свойства.
13. Характеристические функции и их свойства.
    - определение и простейшие свойства: характеристическая функция суммы независимых случайных величин, связь производных характеристической функции с начальными моментами случайной величины, преобразование характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины;
    - теорема о связи сходимости последовательности характеристических функций со сходимостью по распределению (без доказательства).
14. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины:
    - приближение одномерной случайной величины постоянной и линейной функциями;
    - общая задача аппроксимации, условное математическое ожидание как наилучшее приближение.
15. Сходимости последовательностей случайных величин:
    - сходимости с вероятностью единица (почти наверное), по вероятности, по распределению, в среднем квадратичном;
    - лемма Бореля–Кантелли, достаточное условие сходимости с вероятностью единица.
16. Законы больших чисел:
    - закон больших чисел в форме Чебышёва, теорема Бернулли;
    - усиленный закон больших чисел.
17. Центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра–Лапласа.

## Список литературы

[1] Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарёв, «Теория вероятностей, Математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков», М.: МГУ, 2010.

[2] Б. В. Гнеденко, «Курс теории вероятнстей», М.: Едиториал УРСС, 2005.

[3] А. Н. Ширяев, «Вероятность», М.: МЦНОМО, 2004.

[4] Материалы на сайте кафедры математического моделирования и информатики, `http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/probability`.

## II. ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ

*Ниже приведены вопросы программы в том виде, в каком они будут сформулированы в билетах.*

1. Понятие случайного события. Алгебры и сигма-алгебры событий. Примеры и свойства алгебр и сигма-алгебр.
2. Понятие предела последовательности событий. Сходимость монотонных последовательностей событий.
3. Аксиомы вероятности и простейшие следствия из них.
4. Теорема о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
5. Пространство условной вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса.
6. Независимость событий попарная и в совокупности. Свойства независимых событий.
7. Вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний. Биномиальное распределение и отрицательное биномиальное распределение.
8. Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.
9. Определение случайной величины. Свойства функции распределения. Плотность вероятности и ее свойства.
10. Независимость случайных величин: попарная и в совокупности. Свойства моментов суммы и произведения независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания. Неравенство Чебышёва.
12. Дисперсия случайной величины и матрица ковариаций случайного вектора, их свойства. Неравенство Коши–Буняковского.
13. Многомерные нормальные случайные величины и функции от них.
14. Условные распределения и условные плотности вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса для условных плотностей вероятности.
15. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины.
16. Неравенство Чебышёва. Сходимость по вероятности последовательности случайных величин. Закон больших чисел в форме Чебышёва. Теорема Бернулли.
17. Сходимость с вероятностью единица (почти наверное). Лемма Бореля–Кантелли.
18. Усиленный закон больших чисел. Усиленный закон Бернулли.
19. Сходимость по распределению последовательности случайных величин. Характеристические функции и их свойства.
20. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.