

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2023 г.

I. Программа курса

Ниже приведены вопросы программы и их краткое содержание.

1. Понятие предела последовательности событий как множеств элементарных исходов:
 - определение верхнего и нижнего пределов последовательностей множеств;
 - существование предела монотонных (по включению) последовательностей множеств.
2. Алгебры и сигма-алгебры событий:
 - событие как подмножество множества элементарных исходов, операции объединения, пересечения и дополнения, их свойства;
 - определения и свойства алгебр и сигма-алгебр подмножеств множества Ω , примеры.
3. Аксиомы вероятности и следствия из них:
 - простейшие следствия из аксиом: вероятность дополнения к событию, вероятность объединения событий, монотонность вероятности относительно включения множеств;
 - теоремы о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
4. Условная вероятность:
 - вероятностное пространство условной вероятности (аксиоматическое определение);
 - свойства условной вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.
5. Независимость событий:
 - определение попарной и совокупной независимости;
 - свойства независимых событий.
6. Биномиальная схема независимых испытаний:
 - вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний, аксиоматическое определение;
 - биномиальное распределение и отрицательное биномиальное распределение;
 - теорема Пуассона.
7. Понятие случайной величины:
 - определение случайной величины, функция распределения, плотность вероятности;
 - дискретное и абсолютно непрерывное распределения;
 - свойства функции распределения: монотонность, предельные значения при $x \rightarrow \pm\infty$, непрерывность, $P(\xi = x)$ как скачок функции распределения.
8. Понятие многомерной случайной величины, независимость случайных величин:
 - совместная функция распределения, совместная плотность вероятности;
 - независимость случайных величин попарная и в совокупности;
 - формула для плотности вероятности суммы двух независимых абсолютно непрерывно распределённых случайных величин.
9. Условные распределения и условные плотности распределения:
 - понятие условной функции распределения, условное распределение одной случайной величины при фиксированном значении другой случайной величины (дискретный и абсолютно непрерывный случаи);
 - формула полной вероятности и формула Байеса для условных плотностей вероятности.

10. Математическое ожидание:

- определение математического ожидания случайной величины;
- свойства математического ожидания сумм и произведений случайных величин;
- неравенство Чебышёва.
- неравенство Коши–Буняковского для моментов случайных величин;
- условное математическое ожидание.

11. Дисперсия и коэффициент ковариации (ковариация):

- определение дисперсии случайной величины и матрицы ковариаций случайного вектора;
- свойства дисперсии и матрицы ковариаций;
- коэффициент корреляции (корреляция), его свойства.

12. Характеристические функции и их свойства.

- определение и простейшие свойства: характеристическая функция суммы независимых случайных величин, связь производных характеристической функции с начальными моментами случайной величины, преобразование характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины;
- теорема о связи сходимости последовательности характеристических функций со сходимостью по распределению (без доказательства).

13. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины:

- приближение одномерной случайной величины постоянной и линейной функциями;
- общая задача аппроксимации, условное математическое ожидание как наилучшее приближение.

14. Сходимости последовательностей случайных величин:

- сходимости с вероятностью единица (почти наверное), по вероятности, по распределению, в среднем квадратичном;
- лемма Бореля–Кантелли, достаточное условие сходимости с вероятностью единица.

15. Законы больших чисел:

- закон больших чисел в форме Чебышёва, теорема Бернулли;
- усиленный закон больших чисел.

16. Центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра–Лапласа.

17. Понятие об однородной цепи Маркова с конечным числом состояний:

- цепь Маркова как последовательность случайных величин, совместное распределение первых n шагов;
- определение и свойства матриц перехода за один и n шагов;
- финальные вероятности перехода и финальные распределения, теорема Маркова (без доказательства);
- теорема о сходимости среднего времени пребывания в данном состоянии к финальной вероятности состояния (свойство эргодичности).

Список литературы

- [1] Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарёв, «Теория вероятностей, Математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков», М.: МГУ, 2010.
- [2] Б. В. Гнеденко, «Курс теории вероятностей», М.: Едиториал УРСС, 2005.
- [3] А. Н. Ширяев, «Вероятность», М.: МЦНМО, 2004.
- [4] Материалы на сайте кафедры математического моделирования и информатики, <http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/probability>.

II. ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ

Ниже приведены вопросы программы в том виде, в каком они будут сформулированы в билетах.

1. Понятие случайного события. Алгебры и сигма-алгебры событий. Примеры и свойства алгебр и сигма-алгебр.
2. Понятие предела последовательности событий. Сходимость монотонных последовательностей событий.
3. Аксиомы вероятности и простейшие следствия из них.
4. Теорема о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
5. Пространство условной вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса.
6. Независимость событий попарная и в совокупности. Свойства независимых событий.
7. Вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний. Биномиальное распределение и распределение Паскаля.
8. Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.
9. Определение случайной величины. Свойства функции распределения. Плотность вероятности и ее свойства.
10. Независимость случайных величин: попарная и в совокупности. Свойства моментов суммы и произведения независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания. Неравенство Чебышёва.
12. Дисперсия случайной величины и матрица ковариаций случайного вектора, их свойства. Неравенство Коши–Буняковского.
13. Условные распределения и условные плотности вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса для условных плотностей вероятности.
14. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины.
15. Неравенство Чебышёва. Сходимость по вероятности последовательности случайных величин. Закон больших чисел в форме Чебышёва. Теорема Бернулли.
16. Сходимость с вероятностью единица (почти наверное). Лемма Бореля–Кантелли.
17. Усиленный закон больших чисел. Усиленный закон Бернулли.
18. Сходимость по распределению последовательности случайных величин. Характеристические функции и их свойства.
19. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.
20. Цепи Маркова. Свойства матриц перехода.
21. Финальные распределения в цепи Маркова. Теорема Маркова. Существование финальных вероятностей как достаточное условие эгодичности цепи Маркова.