

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2022 г.

I. Программа курса

1. Понятие предела последовательности событий как множеств элементарных исходов:
 - определение верхнего и нижнего пределов последовательностей множеств;
 - существование предела монотонных (по включению) последовательностей множеств.
2. Алгебры и сигма-алгебры событий:
 - событие как подмножество множества элементарных исходов, операции объединения, пересечения и дополнения, их свойства;
 - определения и свойства алгебр и сигма-алгебр подмножеств множества Ω , примеры.
3. Аксиомы вероятности и следствия из них:
 - простейшие следствия из аксиом: вероятность дополнения к событию, вероятность объединения событий, монотонность вероятности относительно включения множеств;
 - теоремы о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
4. Условная вероятность:
 - вероятностное пространство условной вероятности (аксиоматическое определение);
 - свойства условной вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.
5. Независимость событий:
 - определение попарной и совокупной независимости;
 - свойства независимых событий.
6. Биномиальная схема независимых испытаний:
 - вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний, аксиоматическое определение;
 - биномиальное распределение и распределение Паскаля (отрицательное биномиальное);
 - теорема Пуассона.
7. Понятие случайной величины:
 - определение случайной величины, функция распределения, плотность вероятности;
 - дискретное и абсолютно непрерывное распределение;
 - свойства функции распределения: монотонность, предельные значения при $x \rightarrow \pm\infty$, непрерывность, $P(\xi = x)$ как предельное значение скачка функции распределения.
8. Понятие многомерной случайной величины, независимость случайных величин:
 - совместная функция распределения, совместная плотность вероятности;
 - независимость случайных величин попарная и в совокупности;
 - формула для плотности вероятности суммы двух независимых абсолютно непрерывно распределённых случайных величин.
9. Условные распределения и условные плотности распределения:
 - понятие условной функции распределения, условное распределение одной случайной величины при фиксированном значении другой случайной величины (дискретный и абсолютно непрерывный случаи);
 - формула полной вероятности и формула Байеса для условных плотностей вероятности.

10. Математическое ожидание:

- определение математического ожидания случайной величины;
- свойства математического ожидания сумм и произведений случайных величин;
- неравенство Чебышёва.
- неравенство Коши–Буняковского для моментов случайных величин;
- условное математическое ожидание.

11. Дисперсия и коэффициент ковариации (ковариация):

- определение дисперсии случайной величины и матрицы ковариаций случайного вектора;
- свойства дисперсии и матрицы ковариаций;
- коэффициент корреляции, его свойства.

12. Характеристические функции и их свойства.

- определение и простейшие свойства: характеристическая функция суммы независимых случайных величин, связь производных характеристической функции с начальными моментами случайной величины, преобразование характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины;
- теорема о связи сходимости последовательности характеристических функций со сходимостью по распределению (без доказательства).

13. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины:

- приближение одномерной случайной величины постоянной и линейной функциями;
- общая задача аппроксимации, условное математическое ожидание как наилучшее приближение.

14. Сходимости последовательностей случайных величин:

- сходимости с вероятностью единица (почти наверное), по вероятности, по распределению, в среднем квадратичном;
- лемма Бореля–Кантелли, достаточное условие сходимости с вероятностью единица.

15. Законы больших чисел:

- закон больших чисел в форме Чебышёва, теорема Бернулли;
- усиленный закон больших чисел.

16. Центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра–Лапласа.

17. Понятие об однородной цепи Маркова с конечным числом состояний:

- цепь Маркова как последовательность случайных величин, совместное распределение первых n шагов;
- определение и свойства матриц перехода за один и n шагов;
- финальные вероятности перехода и финальные распределения, теорема Маркова (без доказательства);
- теорема о сходимости среднего времени пребывания в данном состоянии к финальной вероятности состояния (свойство эргодичности).

Список литературы

- [1] Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарёв, «Теория вероятностей, Математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков», М.: МГУ, 2010.
- [2] Б. В. Гнеденко, «Курс теории вероятностей», М.: Едиториал УРСС, 2005.
- [3] А. Н. Ширяев, «Вероятность», М.: МЦНМО, 2004.
- [4] Материалы на сайте кафедры математического моделирования и информатики, <http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/probability>.

II. ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ

Ниже приведены вопросы в том виде, в каком они будут сформулированы в билетах.

1. Понятие случайного события. Алгебры и сигма-алгебры событий. Примеры и свойства алгебр и сигма-алгебр.
2. Понятие предела последовательности событий. Сходимость монотонных последовательностей событий.
3. Аксиомы вероятности и простейшие следствия из них.
4. Теорема о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
5. Пространство условной вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса.
6. Независимость событий: попарная и в совокупности. Свойства независимых событий.
7. Вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний. Биномиальное распределение. Отрицательное биномиальное распределение.
8. Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.
9. Определение случайной величины. Свойства функции распределения. Плотность вероятности и ее свойства.
10. Независимость случайных величин: попарная и в совокупности. Свойства моментов суммы и произведения независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания. Неравенство Чебышёва.
12. Дисперсия случайной величины и матрица ковариаций случайного вектора, их свойства. Неравенство Коши–Буняковского.
13. Условные распределения и условные плотности вероятности. Формулы полной вероятности и формулы Байеса для условных плотностей вероятности.
14. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины.
15. Неравенство Чебышёва. Сходимость по вероятности последовательности случайных величин. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли.
16. Лемма Бореля–Кантелли, усиленный закон больших чисел.
17. Сходимость по распределению последовательности случайных величин. Характеристические функции и их свойства.
18. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.
19. Цепи Маркова. Свойства матриц перехода.
20. Финальные распределения в цепи Маркова. Теорема Маркова. Эргодичность цепи Маркова.