

I. Программа курса

1. Алгебры и сигма-алгебры событий:
  - событие как подмножество множества элементарных исходов, операции объединения, пересечения и дополнения, их свойства;
  - определение и свойства алгебр и сигма-алгебр подмножеств множества  $\Omega$ , примеры.
2. Понятие предела последовательности событий:
  - определение верхнего и нижнего пределов последовательностей множеств;
  - существование предела монотонных (по включению) последовательностей множеств.
3. Аксиомы вероятности и следствия из них:
  - простейшие следствия из аксиом, монотонность вероятности относительно включения множеств; вероятность дополнения к событию, вероятность объединения событий;
  - теоремы о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
4. Условная вероятность:
  - вероятностное пространство условной вероятности (аксиоматическое определение);
  - свойства условной вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.
5. Независимость событий:
  - определение попарной и совокупной независимости;
  - свойства независимых событий.
6. Биномиальная схема независимых испытаний:
  - вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний (аксиоматическое определение);
  - биномиальное распределение и отрицательное биномиальное распределение;
  - теорема Пуассона, интегральная и локальная теоремы Муавра–Лапласа.
7. Понятие случайной величины:
  - определение случайной величины, функция распределения, плотность вероятности;
  - типы распределений (дискретное, абсолютно непрерывное);
  - свойства функции распределения.
8. Понятие многомерной случайной величины, независимость случайных величин:
  - совместная функция распределения, совместная плотность вероятности;
  - независимость случайных величин попарная и в совокупности, теорема о независимости функций от независимых случайных величин.

9. Математическое ожидание:
  - определение математического ожидания случайной величины;
  - свойства математического ожидания сумм и произведений случайных величин;
  - неравенство Чебышёва.
10. Дисперсия, коэффициент ковариации (ковариация) и коэффициент корреляции (корреляция):
  - определение дисперсии случайной величины и коэффициента ковариации для двух случайных величин, неравенство Коши–Буняковского, коэффициент корреляции;
  - свойства дисперсии;
  - неотрицательность матрицы ковариаций.
11. Характеристические функции и их свойства.
  - определение и простейшие свойства (характеристическая функция суммы независимых случайных величин, связь производных характеристической функции с начальными моментами случайной величины, преобразование характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины);
  - формулы, связывающие характеристическую функцию с функцией распределения и плотностью вероятности (без доказательства), теорема о связи сходимости последовательности характеристических функций со сходимостью по распределению (без доказательства).
12. Условные распределения и условные плотности вероятности:
  - определение условного распределения для дискретного и абсолютно непрерывного совместных распределений двух случайных величин;
  - формулы полной вероятности и формулы Байеса для дискретных распределений и условных плотностей вероятности.
13. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины:
  - аппроксимация постоянной и линейной функциями;
  - общая задача аппроксимации, условное математическое ожидание.
14. Цепи Маркова:
  - цепь Маркова как последовательность случайных величин, совместное распределение первых  $n$  шагов;
  - определение и свойства матриц перехода за один и  $n$  шагов;
  - финальные вероятности перехода и финальные распределения, теорема Маркова (без доказательства);
  - теорема о сходимости среднего времени пребывания в данном состоянии к финальной вероятности состояния, эргодичность.
15. Сходимости последовательностей случайных величин:
  - понятия сходимостей с вероятностью единица (почти наверное), по вероятности, по распределению, в среднем квадратичном.
16. Законы больших чисел:
  - закон больших чисел в форме Чебышёва, теорема Бернулли;
  - лемма Бореля–Кантелли, усиленный закон больших чисел.
17. Центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра–Лапласа.

## Список литературы

- [1] Ю. П. Пытгев, И. А. Шихмарёв, «Теория вероятностей, Математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков», М.: МГУ, 2010.
- [2] Б. В. Гнеденко, «Курс теории вероятностей», М.: Едиториал УРСС, 2005.
- [3] А. Н. Ширяев, «Вероятность», М.: МЦНОМО, 2004.
- [4] Р. Феллер, «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», М.: Мир, 1984.
- [5] Материалы на сайте кафедры математического моделирования и информатики, <http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/probability>.

## II. ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ

*Ниже приведены вопросы в том виде, в каком они будут сформулированы в билетах; в списке возможны повторы вопросов.*

1. Понятие случайного события. Алгебры и сигма-алгебры событий. Примеры и свойства алгебр и сигма-алгебр.
2. Понятие предела последовательности событий. Сходимость монотонных последовательностей событий.
3. Аксиомы вероятности и простейшие следствия из них.
4. Теорема о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
5. Пространство условной вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса.
6. Независимость событий: попарная и в совокупности. Свойства независимых событий.
7. Вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний. Биномиальное распределение. Отрицательное биномиальное распределение.
8. Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Интегральная теорема Муавра–Лапласа и локальная теорема Муавра–Лапласа.
9. Цепи Маркова. Свойства матриц перехода.
10. Финальные распределения в цепи Маркова. Теорема Маркова. Эргодичность цепи Маркова.
11. Определение случайной величины. Свойства функции распределения. Плотность вероятности и ее свойства.
12. Независимость случайных величин: попарная и в совокупности. Функции от независимых случайных величин. Свойства моментов суммы и произведения независимых случайных величин.
13. Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания. Неравенство Чебышёва.
14. Дисперсия случайной величины и матрица ковариаций случайного вектора и их свойства. Неравенство Коши–Буняковского.
15. Условные распределения и условные плотности вероятности. Формулы полной вероятности и формулы Байеса для условных плотностей вероятности.
16. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины.
17. Неравенство Чебышёва. Сходимость по вероятности последовательности случайных величин. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли.
18. Лемма Бореля–Кантелли, усиленный закон больших чисел.
19. Сходимость по распределению последовательности случайных величин. Характеристические функции и их свойства.
20. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.