

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2018 г.

I. Программа курса

1. Алгебры и сигма-алгебры событий:
 - событие как подмножество множества элементарных исходов, операции объединения, пересечения и дополнения, их свойства;
 - определение и свойства алгебр и сигма-алгебр подмножеств множества Ω , примеры.
2. Понятие предела последовательности событий:
 - определение верхнего и нижнего пределов последовательностей множеств;
 - существование предела монотонных (по включению) последовательностей множеств.
3. Аксиомы вероятности и следствия из них:
 - простейшие следствия из аксиом, вероятность дополнения к событию, вероятность объединения событий;
 - теоремы о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
4. Условная вероятность:
 - вероятностное пространство условной вероятности (аксиоматическое определение);
 - свойства условной вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.
5. Независимость событий:
 - определение попарной и совокупной независимости;
 - свойства независимых событий.
6. Биномиальная схема независимых испытаний:
 - вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний (аксиоматическое определение);
 - биномиальное распределение и отрицательное биномиальное распределение;
 - теорема Пуассона, интегральная теорема Муавра–Лапласа и локальная теорема Муавра–Лапласа.
7. Цепи Маркова:
 - цепь Маркова как последовательность случайных величин, совместное распределение первых n шагов;
 - определение и свойства матриц перехода за один и n шагов;
 - финальные вероятности перехода и финальные распределения, теорема Маркова (без доказательства);
 - теорема о сходимости среднего времени пребывания в данном состоянии к финальной вероятности состояния, эргодичность.
8. Понятие случайной величины:
 - определение случайной величины, функция распределения, плотность распределения;
 - типы распределений (дискретное, абсолютно непрерывное);
 - свойства функции распределения.
9. Понятие многомерной случайной величины, независимость случайных величин:
 - совместная функция распределения, совместная плотность распределения;
 - независимость случайных величин попарная и в совокупности, теорема о независимости функций от независимых случайных величин.

10. Математическое ожидание:
 - определение случайной величины;
 - свойства математического ожидания сумм и произведений случайных величин;
 - неравенства Чебышёва и Коши–Буняковского.
11. Дисперсия и коэффициент ковариации:
 - определение дисперсии случайной величины и матрицы ковариаций случайного вектора;
 - свойства дисперсии и матрицы ковариаций.
12. Характеристические функции и их свойства.
 - определение и простейшие свойства (характеристическая функция суммы независимых случайных величин, связь производных характеристической функции с начальными моментами случайной величины, преобразование характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины);
 - формулы, связывающие характеристическую функцию с функцией распределения и плотностью распределения (без доказательства), теорема о связи сходимости последовательности характеристических функций со сходимостью по распределению (без доказательства).
13. Условные распределения и условные плотности распределения:
 - определение условного распределения для дискретного и абсолютно непрерывного совместных распределений двух случайных величин;
 - формулы полной вероятности и формулы Байеса для условных плотностей.
14. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины:
 - аппроксимация постоянной и линейной функциями;
 - общая задача аппроксимации, условное математическое ожидание.
15. Сходимости последовательностей случайных величин:
 - понятия сходимостей с вероятностью единица (почти наверное), по вероятности, по распределению, в среднем квадратичном.
16. Законы больших чисел:
 - закон больших чисел в форме Чебышева, теорема Бернулли;
17. Центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра–Лапласа.

Список литературы

- [1] Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарёв, «Теория вероятностей, Математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков», М.: МГУ, 2010.
- [2] Б. В. Гнеденко, «Курс теории вероятностей», М.: Едиториал УРСС, 2005.
- [3] А. Н. Ширяев, «Вероятность», М.: МЦНМО, 2004.
- [4] Р. Феллер, «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», М.: Мир, 1984.
- [5] Материалы на сайте кафедры математического моделирования и информатики, <http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/probability>.

II. ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ

Ниже приведены вопросы в том виде, в каком они будут сформулированы в билетах; в списке возможны повторы вопросов.

1. Понятие случайного события. Алгебры и сигма-алгебры событий. Примеры и свойства алгебр и сигма-алгебр.
2. Понятие предела последовательности событий. Сходимость монотонных последовательностей событий.
3. Аксиомы вероятности и простейшие следствия из них.
4. Теорема о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
5. Пространство условной вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса.
6. Независимость событий: попарная и в совокупности. Свойства независимых событий.
7. Вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний. Биномиальное распределение. Отрицательное биномиальное распределение.
8. Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Интегральная теорема Муавра–Лапласа и локальная теорема Муавра–Лапласа.
9. Цепи Маркова. Свойства матриц перехода.
10. Финальные распределения в цепи Маркова. Теорема Маркова. Эргодичность цепи Маркова.
11. Определение случайной величины. Свойства функции распределения. Плотность распределения и ее свойства.
12. Независимость случайных величин: попарная и в совокупности. Функции от независимых случайных величин. Свойства моментов суммы и произведения независимых случайных величин.
13. Математическое ожидание случайной величины. Свойства математического ожидания. Неравенство Чебышёва.
14. Дисперсия случайной величины и матрица ковариаций случайного вектора и их свойства. Неравенство Коши–Буняковского.
15. Условные распределения и условные плотности распределения. Формулы полной вероятности и формулы Байеса для условных плотностей.
16. Приближение случайной величины функциями от другой случайной величины.
17. Неравенство Чебышёва. Сходимость по вероятности последовательности случайных величин. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли.
18. Сходимость по распределению последовательности случайных величин. Характеристические функции и их свойства.
19. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.