

**Развёрнутая программа курса  
«Математическая статистика  
и основы теории случайных процессов».  
Осенний семестр 2023-2024 учебного года.**

1. Выборочные характеристики распределений:
  - понятие статистики,
  - выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочный момент  $k$ -го порядка
  - порядковая статистика, вариационный ряд,
  - распределение порядковых статистик.
2. Распределение ортогональных проекций нормальных векторов:
  - понятие ортогонального проектора в  $n$ -мерном евклидовом пространстве,
  - теорема о сохранении стандартного нормального распределения случайного вектора при преобразованиях базиса,
  - распределения хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, примерный вид их плотностей вероятности.
3. Общая задача интервального оценивания:
  - понятие интервальной оценки с уровнем доверия  $\gamma$  для одномерного параметра  $\theta$  распределения выборки,
  - метод построения интервальной оценки,
  - понятие асимптотической интервальной оценки,
  - метод построения асимптотических интервальных оценок.
4. Интервальные оценки параметров нормального распределения:
  - интервальная оценка математического ожидания при известной дисперсии,
  - интервальные оценки дисперсии при известном математическом ожидании,
  - интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии, обоснование использования распределения Стьюдента,
  - интервальные оценки дисперсии при неизвестном математическом ожидании, обоснование использования распределения хи-квадрат.
5. Точечные оценки параметра распределения и функций от параметра, несмещённость, состоятельность и минимальность дисперсии:
  - несмещённость оценки,
  - состоятельность оценки,
  - минимальность дисперсии,
  - теорема о единственности несмещённой оценки минимальной дисперсии,
  - теорема о необходимом и достаточном условии того, что несмещённая оценка имеет минимальную дисперсию.

6. Эффективные точечные оценки одномерного параметра распределения:
  - теорема Крамера–Рао,
  - связь эффективных оценок и несмещённых оценок минимальной дисперсии,
  - связь эффективных оценок и оценок максимального правдоподобия.
7. Достаточные статистики и полные достаточные статистики:
  - теорема о факторизации,
  - теорема Блекуэлла–Колмогорова,
  - понятие полной статистики,
  - функция от полной достаточной статистики как несмещённая оценка минимальной дисперсии.
8. Оценки максимального правдоподобия и оценки метода моментов:
  - функция правдоподобия для выборки объема  $n$ ,
  - связь оценок максимального правдоподобия с эффективными оценками,
  - оценки максимального правдоподобия при наличии достаточной статистики,
  - оценки метода моментов, их состоятельность.
9. Несмещённые оценки минимальной дисперсии параметров линейной схемы измерений:
  - линейная схема измерений,
  - постановка и решение задачи линейной регрессии,
  - связь стохастической задачи линейной регрессии с методом наименьших квадратов.
10. Общая задача проверки гипотез, лемма Неймана–Пирсона:
  - постановка общей задачи проверки гипотезы о параметре распределения,
  - понятие статистического критерия, ошибки критерия, мощность критерия,
  - наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы против простой альтернативы, лемма Неймана–Пирсона (нерандомизированный критерий).
  - понятие о рандомизированном наиболее мощном критерии проверки простой гипотезы против простой альтернативы, лемма Неймана–Пирсона с рандомизацией (без доказательства).
11. Проверка гипотез о параметре распределения, случай сложной альтернативы:
  - понятие равномерно наиболее мощного критерия,
  - локально наиболее мощный критерий для односторонних и двусторонних альтернатив.
12. Непараметрические задачи проверки гипотез:
  - критерий Колмогорова–Смирнова,
  - критерий хи-квадрат,
  - критерии проверки гипотез о сравнении средних и дисперсий двух нормальных выборок.

13. Надёжность гипотезы (p-value):

- понятие надёжности гипотезы (p-value),
- надёжность как случайная величина, пример вычисления распределения надёжности в случае простой гипотезы и простой альтернативы.

14. Процесс Пуассона:

- определение процесса Пуассона и пуассонова потока требований,
- многомерное распределение процесса Пуассона,
- математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,
- теорема о том, что пуассонов поток требований есть процесс Пуассона.

15. Процесс Винера:

- определение процесса Винера,
- многомерная плотность вероятности процесса Винера,
- математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,
- процесс Винера как предел дискретных симметричных случайных блужданий,
- аналитические свойства траекторий процесса Винера.

16. Марковские процессы с конечным числом состояний и однородной матрицей перехода:

- определение и основные характеристики марковского процесса, матрица перехода,
- уравнение Чепмена–Колмогорова,
- дифференциальные уравнения Колмогорова для матриц перехода (без обоснования дифференцируемости матриц перехода как функций от времени),
- дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

В программу входят доказательства теорем и свойств, а также вывод уравнений и формул, указанных в списке, если иное не оговорено особо.