

**Развёрнутая программа курса
«Математическая статистика
и основы теории случайных процессов».
Осенний семестр 2023-2024 учебного года.**

1. Выборочные характеристики распределений:
 - понятие статистики,
 - выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочный момент k -го порядка
 - порядковая статистика, вариационный ряд,
 - распределение порядковых статистик.
2. Распределение ортогональных проекций нормальных векторов:
 - понятие ортогонального проектора в n -мерном евклидовом пространстве,
 - теорема о сохранении стандартного нормального распределения случайного вектора при преобразованиях базиса,
 - распределения хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, примерный вид их плотностей вероятности.
3. Общая задача интервального оценивания:
 - понятие интервальной оценки с уровнем доверия γ для одномерного параметра θ распределения выборки,
 - метод построения интервальной оценки,
 - понятие асимптотической интервальной оценки,
 - метод построения асимптотических интервальных оценок.
4. Интервальные оценки параметров нормального распределения:
 - интервальная оценка математического ожидания при известной дисперсии,
 - интервальные оценки дисперсии при известном математическом ожидании,
 - интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии, обоснование использования распределения Стьюдента,
 - интервальные оценки дисперсии при неизвестном математическом ожидании, обоснование использования распределения хи-квадрат.
5. Точечные оценки параметра распределения и функций от параметра, несмещённость, состоятельность и минимальность дисперсии:
 - несмещённость оценки,
 - состоятельность оценки,
 - минимальность дисперсии,
 - теорема о единственности несмещённой оценки минимальной дисперсии,
 - теорема о необходимом и достаточном условии того, что несмещённая оценка имеет минимальную дисперсию.

6. Эффективные точечные оценки одномерного параметра распределения:

- теорема Крамера–Рао,
- связь эффективных оценок и несмещённых оценок минимальной дисперсии,
- связь эффективных оценок и оценок максимального правдоподобия.

7. Достаточные статистики и полные достаточные статистики:

- теорема о факторизации,
- теорема Блекуэлла–Колмогорова,
- понятие полной статистики,
- функция от полной достаточной статистики как несмещённая оценка минимальной дисперсии.

8. Оценки максимального правдоподобия и оценки метода моментов:

- функция правдоподобия для выборки объема n ,
- связь оценок максимального правдоподобия с эффективными оценками,
- оценки максимального правдоподобия при наличии достаточной статистики,
- оценки метода моментов, их состоятельность.

9. Несмещённые оценки минимальной дисперсии параметров линейной схемы измерений:

- линейная схема измерений,
- постановка и решение задачи линейной регрессии,
- связь стохастической задачи линейной регрессии с методом наименьших квадратов.

10. Общая задача проверки гипотез, лемма Неймана–Пирсона:

- постановка общей задачи проверки гипотезы о параметре распределения,
- понятие статистического критерия, ошибки критерия, мощность критерия,
- наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы против простой альтернативы, лемма Неймана–Пирсона (нерандомизированный критерий).
- понятие о рандомизированном наиболее мощном критерии проверки простой гипотезы против простой альтернативы, лемма Неймана–Пирсона с рандомизацией (без доказательства).

11. Проверка гипотез о параметре распределения, случай сложной альтернативы:

- понятие равномерно наиболее мощного критерия,
- локально наиболее мощный критерий для односторонних и двусторонних альтернатив.

12. Непараметрические задачи проверки гипотез:

- критерий Колмогорова–Смирнова,
- критерий хи-квадрат,
- критерии проверки гипотез о сравнении средних и дисперсий двух нормальных выборок.

13. Надёжность гипотезы (p-value):

- понятие надёжности гипотезы (p-value),
- надёжность как случайная величина, пример вычисления распределения надёжности в случае простой гипотезы и простой альтернативы.

14. Процесс Пуассона:

- определение процесса Пуассона и пуассонова потока требований,
- многомерное распределение процесса Пуассона,
- математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,
- теорема о том, что пуассонов поток требований есть процесс Пуассона.

15. Процесс Винера:

- определение процесса Винера,
- многомерная плотность вероятности процесса Винера,
- математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,
- процесс Винера как предел дискретных симметричных случайных блужданий,
- аналитические свойства траекторий процесса Винера.

16. Марковские процессы с конечным числом состояний и однородной матрицей перехода:

- определение и основные характеристики марковского процесса, матрица перехода,
- уравнение Чепмена–Колмогорова,
- дифференциальные уравнения Колмогорова для матриц перехода (без обоснования дифференцируемости матриц перехода как функций от времени),
- дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

В программу входят доказательства теорем и свойств, а также вывод уравнений и формул, указанных в списке, если иное не оговорено особо.