

**Развёрнутая программа курса
«Математическая статистика
и основы теории случайных процессов».
Осенний семестр 2024-2025 учебного года.**

1. Процесс Пуассона:

- многомерное распределение процесса Пуассона,
- математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,
- теорема о том, что пуассонов поток требований есть процесс Пуассона.

2. Процесс Винера:

- многомерная плотность вероятности процесса Винера,
- математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция,
- процесс Винера как предел дискретных симметричных случайных блужданий,
- аналитические свойства траекторий процесса Винера (без доказательства свойств, выполняющихся с вероятностью единица).

3. Цепи Маркова конечным числом состояний и однородной матрицей перехода:

- матрицы перехода за один и n шагов,
- уравнение Чепмена–Колмогорова,
- финальные вероятности, теорема Маркова о достаточном условии существования финальных вероятностей (без доказательства),
- эргодическое свойство, равенство «среднего по ансамблю» и «среднего по времени».

4. Марковские процессы с конечным числом состояний и однородной матрицей перехода:

- дифференциальные уравнения Колмогорова для матриц перехода (без обоснования дифференцируемости матриц перехода как функций от времени),
- дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

5. Выборочные характеристики распределений:

- выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочный момент k -го порядка
- порядковая статистика, вариационный ряд,
- распределение порядковых статистик.

6. Точечные оценки параметра распределения и функций от параметра, несмещённость, состоятельность и минимальность дисперсии:

- несмещённость оценки,
- состоятельность оценки,
- теорема о единственности несмещённой оценки минимальной дисперсии.

7. Эффективные оценки одномерного параметра распределения:
 - теорема Крамера–Рао,
 - связь эффективных оценок и несмещённых оценок минимальной дисперсии,
 - связь эффективных оценок и оценок максимального правдоподобия.
8. Достаточные статистики:
 - теорема о факторизации,
 - теорема Блекуэлла–Колмогорова,
9. Оценки максимального правдоподобия и оценки метода моментов:
 - связь оценок максимального правдоподобия с эффективными оценками,
 - оценки максимального правдоподобия при наличии достаточной статистики,
 - оценки метода моментов, их состоятельность.
10. Несмещённые оценки минимальной дисперсии параметров линейной схемы измерений:
 - линейная схема измерений,
 - постановка и решение задачи линейной регрессии,
 - связь стохастической задачи линейной регрессии с методом наименьших квадратов.
11. Общая задача интервального оценивания, асимптотические интервальные оценки:
 - метод построения интервальной оценки,
 - понятие асимптотической интервальной оценки,
 - метод построения асимптотических интервальных оценок.
12. Интервальные оценки параметров нормального распределения:
 - интервальная оценка математического ожидания при известной дисперсии,
 - интервальные оценки дисперсии при известном математическом ожидании,
 - интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии,
 - интервальные оценки дисперсии при неизвестном математическом ожидании.
13. Общая задача проверки гипотез, лемма Неймана–Пирсона:
 - наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы против простой альтернативы, лемма Неймана–Пирсона (нерандомизированный критерий),
 - понятие о рандомизированном наиболее мощном критерии проверки простой гипотезы против простой альтернативы, лемма Неймана–Пирсона с рандомизацией (без доказательства),
 - равномерно наиболее мощные критерии проверки простой гипотезы против сложной альтернативы.

14. Инвариантные и локально наиболее мощные критерии:

- понятие об инвариантных критериях,
- обобщенная лемма Неймана–Пирсона,
- локально наиболее мощные критерии для односторонних и двусторонней альтернатив.

15. Непараметрические задачи проверки гипотез о распределении выборки:

- критерий Колмогорова проверки гипотезы,
- критерий хи-квадрат,

16. Задачи проверки гипотез о равенстве параметров нормального распределения в двух выборках:

- критерий Стьюдента проверки гипотез о равенстве средних
- критерий Фишера о равенстве дисперсий двух нормальных выборок.

17. Надёжность гипотезы (p-value):

- понятие надёжности гипотезы (p-value),
- надёжность как случайная величина, пример вычисления распределения надёжности в случае простой гипотезы и простой альтернативы.

В программу входят доказательства теорем и свойств, а также вывод уравнений и формул, указанных в списке, если иное не оговорено особо.