

Глава 4. Функции.

Вычисление значений математических функций

Как вы знаете, любую математическую функцию можно разложить в ряд Тейлора. Рассмотрим для примера функцию экспоненты

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Т.е. $a_i = x^i/i!$. Учтите, что значение a_i не нужно вычислять каждый раз. Необходимо выразить значение $(i+1)$ -го члена последовательности через i -й:

$$a_{i+1} = \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{x * x^i}{i! * (i+1)} = a_i \frac{x}{i+1}$$

Теперь напомним функцию, вычисляющую значение с заданной точностью eps :

```
double f(double x, double eps)
{
    double s=0; // Тут копируем сумму
    double ai=1.; // Тут храним i-ый член ряда
    int i=0; // начальное значение i=0
    while (fabs(ai)>eps)
    // Суммировать будем пока член ряда an не станет достаточно маленьким
    {
        s+=ai; // суммируем очередной член ряда
        ai*=x/(i+1); // пересчитываем a(i+1) через a(i)
        i++; // переходим к следующему члену
    }
    return s; // получившаяся сумма
}
```

Программа для тестирования этой функции будет выглядеть так:

```
int main()
{
    system("chcp 1251 > NUL");
    double xb, xe, step, eps;
    printf("x начальное=");
    scanf("%lf", &xb);
    printf("x конечное=");
    scanf("%lf", &xe);
    printf("шаг=");
    scanf("%lf", &step);
    printf("точность=");
    scanf("%lf", &eps);
    getchar();
    for (double x=xb; x<xe+step/2.; x+=step)
        printf("%lf\t%lf\t%lf\n", x, f(x, eps), exp(x));
    getchar();
    return 0;
}
```

Т.е. в программе вводятся x начальное и x конечное, шаг, с которым нужно получать значения и точность вычисления eps . И далее в цикле печатаются значения x , получившейся функции и библиотечной функции.

Обратите внимание на условие $x < xe + step/2$. Нюанс в том, что если написать $x \leq xe$, то последняя строка может и не напечататься. Причина в том, что двоичные числа с плавающей запятой дают приближенное значение при переводе в десятичную систему счисления. И, например, вместо 1.1 может получиться 1.0999999999999999.

Варианты задач для решения.

Напишите функцию `double f(double x, double eps)` вычисляющую значение библиотечной

функции, заданной разложением в ряд Тейлора $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$. Суммирование завершайте по

достижению условия $|a_n(x)| \leq eps$. Для вычисления a_n воспользуйтесь рекуррентными соотношениями. Функция должна поверять значение x и выдавать сообщение об ошибке при задании x вне диапазона, разрешённого для используемого ряда.

Функцию поместить в отдельный файл (например, *lib.cpp*). Объявление функции поместить в заголовочный файл (например, *lib.h*). Программу тестирования этой функции поместить в другой файл (например, *task4.cpp*). В ней нужно организовать ввод параметра *eps*, интервал и шаг изменения аргумента x и печать таблицы значений аргумента, функции $f(x)$ и соответствующей библиотечной функции.

<p>1. Вариант</p> $f(x) = \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \quad a_n = \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!}$
<p>2. Вариант</p> $f(x) = \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x), a_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{-2n-1}}{2n+1}, x > 1$
<p>3. Вариант</p> $f(x) = (1-x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad a_n = \frac{(-1)^n m(m-1)\dots(m-n+1)(x)^n}{(n)!}, x < 1, m=1/2$
<p>4. Вариант</p> $f(x) = \operatorname{sinc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \quad a_n = \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n+1)!}$
<p>5. Вариант</p> $f(x) = \operatorname{arcch}(x) = \ln(2x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1*3*5*\dots*(2n-1)(x)^{-2n}}{2*4*6*\dots*(2n)}$
<p>6. Вариант</p> $f(x) = \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x), a_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x < 1$
<p>7. Вариант</p> $f(x) = \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad a_n = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
<p>8. Вариант</p> $f(x) = \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{nx^n}, x > 0.5$
<p>9. Вариант</p> $f(x) = \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x), a_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1}, x < 1$
<p>10. Вариант</p> $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}$
<p>11. Вариант</p> $f(x) = \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$
<p>12. Вариант</p> $f(x) = \operatorname{arcch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{-2n-1}}{2n+1}, x > 1$

13. Вариант

$$f(x) = \ln(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}, \quad x > 0$$

14. Вариант

$$f(x) = \ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x)^n}{n}, \quad |x| < 1$$

15. Вариант

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad a_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(x)^n}{(n!)}, \quad |x| < 1, m=1/3$$

16. Вариант

$$f(x) = \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^n}{n}, \quad |x| > 1$$

17. Вариант

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{-2n-1}}{2n+1}, \quad |x| > 1$$

18. Вариант

$$f(x) = \arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1*3*5*\dots*(2n-1)(x)^{2n+1}}{2*4*6*\dots*(2n)*(2n+1)}$$

19. Вариант

$$f(x) = \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1*3*5*\dots*(2n-1)(x)^{2n+1}}{2*4*6*\dots*(2n)*(2n+1)}$$

20. Вариант

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

21. Вариант

$$f(x) = (1-x)^{-m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad a_n = \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)(x)^n}{(n!)}, \quad |x| < 1, m=1/4$$

22. Вариант

$$f(x) = \operatorname{arcsinh}(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1*3*5*\dots*(2n-1)(x)^{2n+1}}{2*4*6*\dots*(2n)*(2n+1)}$$

23. Вариант

$$f(x) = \operatorname{arctanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

24. Вариант

$$f(x) = \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \quad a_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

25. Вариант

$$f(x) = x \cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} (x)^{2n+1}}{(2n)!}$$

26. Вариант

$$f(x) = \ln(1-x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{n}$$

27. Вариант

$$f(x) = 0.5 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x), \quad a_n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

28. Вариант

$$f(x) = 0.25 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 0.5 * \arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x), \quad a_n = \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$$

29. Вариант

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x), \quad a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

30. Вариант

$$f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{n-1}}{(2n)!}$$

Вычисление определенных интегралов

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ можно использовать один из следующих численных

методов, различающихся по своей точности, достигаемой при одинаковых затратах вычислительных ресурсов.

Методы нижних, верхних и средних прямоугольников

Будем рассматривать определенный интеграл как площадь под графиком подынтегральной функции. Разобьем весь интервал интегрирования на N отрезков одинаковой длины. Тогда аппроксимацией для площади под графиком функции может служить сумма площадей прямоугольников, ширина которых равна длине одного отрезка разбиения, а высота – значению функции $f(x)$ в данном месте графика функции. При этом метод нижних прямоугольников будет приближать значение интеграла снизу:

$$I = \sum \Delta F_i, \quad \Delta F_i = h \cdot \min(f(x_i), f(x_i+h)), \quad \text{где } h = x_{i+1} - x_i$$

Метод верхних прямоугольников будет приближать значение интеграла сверху:

$$I = \sum \Delta F_i, \quad \Delta F_i = h \cdot \max(f(x_i), f(x_i+h)), \quad \text{где } h = x_{i+1} - x_i$$

Нужно обратить внимание, что методы нижних и верхних прямоугольников не тождественны методам правых и левых прямоугольников, так как функции на различных участках могут как возрастать, так и убывать. Также нужно принимать во внимание то, что истинное значение интеграла будет лежать строго между результатами, посчитанными методами нижних и верхних прямоугольников, то есть, вычисляя два этих метода одновременно – можно оценить и точность получившегося решения. При этом затраты вычислительных ресурсов не сильно вырастут, если устранить повторные вычисления функции в одной и той же точке.

Метод средних прямоугольников будет давать результаты, средние между описанными выше двумя методами:

$$I = \sum \Delta F_i, \quad \Delta F_i = h \cdot f(x_i + h/2), \quad \text{где } h = x_{i+1} - x_i$$

Метод трапеций

Метод трапеций – чуть точнее метода прямоугольников, он заключается в том, что вычисляется площадь трапеции, а не прямоугольника:

$$I = \sum \Delta F_i, \quad \Delta F_i = h \cdot (f(x_i) + f(x_i+h)) / 2, \quad \text{где } h = x_{i+1} - x_i$$

Нужно обратить внимание, что этот метод не совпадает с методом средних прямоугольников, хотя и похож на него.

Метод парабол (метод Симпсона)

Большой выигрыш в точности вычислений при эквивалентной затрате вычислительных ресурсов дает метод Симпсона, при котором на каждом сегменте разбиения находятся коэффициенты параболы по трем точкам, находящимся на границах сегмента и в его центре, интеграл от квадратичной функции легко вычисляется аналитически, что дает в результате следующую формулу для метода парабол:

$$I = \sum \Delta F_i, \Delta F_i = h \cdot (f(x_i) + 4 \cdot f(x_i+h/2) + f(x_i+h)) / 6, \text{ где } h = x_{i+1} - x_i$$

Рассмотрим функцию, вычисляющую значение интеграла этим способом:

```
#include <math.h>
// наша интегрируемая функция:
double f(double x)
{
    return cos(x);
}
// первообразная функция:
double Int(double x)
{
    return sin(x);
}
// функция вычисляющая интеграл на интервале [a,b]
// по формуле Симпсона с заданной точностью eps
int N_Iter; // глобальная переменная для количества итераций
double Integral(double a, double b, double eps)
{
    int k=10; // начальное к-во разбиений
    N_Iter=0;
    // значения интегралов на текущей и предыдущей итерациях:
    double val1, val2=0.;
    do
    {
        val1=val2; // предыдущее значение равно текущему
        double s=0; // переменная для суммирования
        double x=a; // начинаем с a
        double h=(b-a)/k; // шаг интегрирования
        for(int i=0; i<k; i++) // повторяем k раз
        {
            double t=h*(f(x)+4.*f(x+h/2)+f(x+h))/6.;
            s+=t; // суммируем очередную площадь
            x+=h; // переходим к следующему интервалу
        }
        val2 = s; // вычисленное новое значение
        k*=2; // удвоение количества разбиений
        N_Iter++; // подсчитываем к-во итераций
    } while (fabs(val1-val2)>eps); // повторяем до достижения точности eps
    return val2; // возвращаем результат интегрирования
}
```

Проинтегрируем ее в интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с точностью eps:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <math.h>
extern int N_Part; // переменная N_Part объявлена в другом файле
double Integral(double a, double b, double eps);
double Int(double x);
// -----
extern int N_Iter;
int main()
{
    system("chcp 1251 > NUL");
    double eps=1e-6; // точность интегрирования
    double xb=-M_PI_2; // начало интервала
    double xe=M_PI_2; // конец интервала
    double res=Integral(xb, xe, eps); // вычисление нового значения
    printf("Вычисленное значение=%lf\n", res);
    printf("Аналитическое значение=%lf\n", Int(xe)-Int(xb));
    printf("Количество итераций=%d\n", N_Iter);
    getchar();
    return 0;
}
```

Варианты задач для решения.

Вычислить значение определённого интеграла двумя способами. Для вычисления необходимо задать

границы интегрирования и точность расчетов в функции *main()*. Их можно либо ввести с клавиатуры, либо передать через параметры командной строки. Функции *f()* (подынтегральная функция), *fint()* (аналитическое вычисление интеграла), *Integral()* (интеграл, посчитанный численно) нужно перенести в отдельный *.cpp файл. А их объявления – в заголовочный файл.

Функции *Integral()* передаётся начало и конец интервала интегрирования и требуемая точность. Она должна возвращать вычисленное значение интеграла и записывать финальное количество разбиений в глобальную переменную.

В функции *main()* нужно найти и вывести

- Значение интеграла, полученное численным методом;
- Аналитическое значение интеграла;
- Достигнутая точность;
- Количество итераций (удвоений разбиения), которые понадобились для достижения требуемой точности.

Вид подынтегральной функции и способы вычисления для каждого варианта приведены в таблице.

Вар.	Подынтегральная функция	Первообразная	Метод 1	Метод 2
1	$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	Верхних прямоугольников	Трапеций
2	$\frac{2}{x}$	$\ln(x^2)$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
3	$2x \cos(2x) + \sin(2x)$	$x \sin(2x)$	Трапеций	Симпсона
4	$\ln(x) + 1$	$x * \ln(x)$	Трапеций	Верхних прямоугольников
5	$(3 + 5x)^3$	$\frac{(3 + 5x)^4}{20}$	Трапеций	Верхних прямоугольников
6	$\frac{2x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2}$	$\frac{x^2}{1-x}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
7	$\frac{1}{x^2 - 1}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right $	Верхних прямоугольников	Средних прямоугольников
8	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	Трапеций	Нижних прямоугольников
9	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2}$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
10	$\sin(2x)$	$\sin^2(x)$	Трапеций	Симпсона
11	$\operatorname{tg}(x)$	$-\log \cos(x) $	Нижних прямоугольников	Симпсона
12	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x)$	Трапеций	Нижних прямоугольников

13	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\log \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right $	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
14	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\log \left x + \sqrt{1+x^2} \right $	Средних прямоугольников	Симпсона
15	$\frac{x}{1+x^2}$	$\frac{\log \left x^2 + 1 \right }{2}$	Нижних прямоугольников	Трапеций
16	$\frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$	$\frac{1}{1+\cos(x)}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
17	$x e^{x^2}$	$\frac{e^{x^2}}{2}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
18	$e^x (\cos(x) - \sin(x))$	$e^x \cos(x)$	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
19	$\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln^2(x)}$	$\frac{x}{\ln(x)}$	Трапеций	Верхних прямоугольников
20	$x(2 \ln(x) + 1)$	$x^2 \ln(x)$	Трапеций	Средних прямоугольников
21	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$	Трапеций	Нижних прямоугольников
22	$1 - \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	Трапеций	Симпсона
23	$\frac{1}{x^2} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$	$\cos \left(\frac{1}{x} \right)$	Трапеций	Нижних прямоугольников
24	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right $	Верхних прямоугольников	Нижних прямоугольников
25	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\operatorname{tg}(x)$	Нижних прямоугольников	Симпсона
26	$\frac{x}{x^2 + 1}$	$\frac{\ln \left x^2 + 1 \right }{2}$	Трапеций	Средних прямоугольников
27	$\operatorname{tg}^2(x)$	$\operatorname{tg}(x) - x$	Нижних прямоугольников	Верхних прямоугольников
28	$3x^2 - 4x$	$x^3 - 2x^2$	Верхних прямоугольников	Трапеций

29	$\sqrt{x^2+1}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} - \frac{\ln x+\sqrt{x^2+1} }{2}$	Симпсона	Нижних прямоугольников
30	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x+\sqrt{x^2-1} }{2}$	Трапеций	Средних прямоугольников