Сходимости последовательностей случайных величин (продолжение)

Последовательность $\{\xi_n\}$ сходится *с вероятностью единица* (*почти наверное*) к с. в. ξ ($\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$), если

$$P\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1.$$

Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\Big) = 0.$$

Теорема

Если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow{\text{P}} \xi$.

Доказательство

Будем доказывать от противного.

Есть сходимость по вероятности:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Нет сходимости по вероятности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad P\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon_0\big) \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. найдутся $\delta_0 > 0$ и подпоследовательность $\{\xi_{n_j}\} \subset \{\xi_n\}$:

$$P\big(|\xi_{n_j} - \xi| \geqslant \varepsilon_0\big) \geqslant \delta_0 \quad \text{для всех} \quad j = 1, 2, \dots .$$

Пусть $A_k = \{\omega\colon |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon_0\}$. Тогда $P(A_{n_j}) \geqslant \delta_0$ для любого j.
Для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{j\colon n_j \geqslant n} A_{n_j},$$

следовательно,

$$P\Bigl(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Bigr) \geqslant P\Bigl(\bigcup_{j\colon n_j \geqslant n} A_{n_j}\Bigr) \geqslant \delta_0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

следовательно,

$$P\Bigl(\limsup_{n\to\infty}\{\omega\colon\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon_0\}\Bigr) = P\Bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Bigr) =$$

$$= P\Bigl(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Bigr) = \lim_{n\to\infty} P\Bigl(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Bigr) \geqslant \delta_0 > 0.$$

Теорема (Лемма Бореля–Кантелли)

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, *то* $P(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Доказательство

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

в силу сходимости ряда вероятностей.

Верхний предел – это множество тех элементарных исходов, которые принадлежат бесконечному числу множеств из $A_1, A_2, \ldots$. Следовательно, можно формулировать лемму Бореля–Кантелли как

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *то с вероятностью единица происходит только конечное число событий из* $A_1, A_2, \ldots$.

Если с вероятностью 1 происходит только конечное число событий из $A_1, A_2, \dots$,

$$P\left(\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n}\right) = 1,$$

то неверно, что $\exists\, N:$ с вероятностью 1 происходят только события из $A_1, \dots, A_N$.
Если $\omega \in \overline{\limsup_{n\to\infty} A_n}$, то ω может принадлежать A_n при любом n.

Из леммы Бореля-Кантелли следует

Теорема (достаточное условие сходимости почти наверное)

Пусть $A_n(\varepsilon) = \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n(\varepsilon)) < \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$, *то*

$$P(\limsup A_n(\varepsilon)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi.$$

Законы больших чисел (ЗБЧ)

Это утверждения о сходимости $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$.

Теорема (ЗБЧ Чебышёва)

Пусть с. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *имеют математические ожидания и дисперсии,* $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ *при любых* $i \neq j$ *(некоррелированы). Если* $D\xi_k < C$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$ *, то*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Доказательство

Пусть $\mathring{\xi}_k = \xi_k - M\xi_k$, тогда $M\mathring{\xi}_k = 0$, $D\mathring{\xi}_k = D\xi_k$, $\operatorname{cov}(\mathring{\xi}_i, \mathring{\xi}_j) = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$. Пусть $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)$. Из некоррелированности

$$D\eta_n = D\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D\mathring{\xi}_k = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k \leqslant nC.$$

Из неравенства Чебышёва для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}D\eta_n \leqslant \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Можно заменить условие некоррелированности условием независимости (попарной или в совокупности).
Если все $\xi_1, \xi_2 \dots$ – н.с.в. ($\xi_1, \dots, \xi_n$ – н.с.в. при любом n), одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$, то условия ЗБЧ Чебышёва выполнены.
Тогда

$$\bar{\xi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \mu.$$

Частным случаем этого утверждения является *закон больших чисел в форме Бернулли.*

Теорема (ЗБЧ Бернулли)

В n независимых биномиальных испытаниях с вероятностью успеха p частота успеха сходится при $n \to \infty$ к p по вероятности.

Доказательство

Пусть η_n – число успехов в n независимых биномиальных испытаниях, $\eta_n \sim \mathbf{B}(n, p)$. Тогда частота успеха равна η_n/n. Представим η_n в виде

$$\eta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

где ξ_k – число успехов в одном k-м испытании, $k = 1, \ldots, n$. Очевидно, что

$$P(\xi_k = 1) = p, \qquad P(\xi_k = 0) = q = 1 - p,$$

$$M\xi_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \quad M\xi_k^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p, \quad D\xi_k = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Независимость испытаний означает, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – н.с.в. при любом n. Применяем ЗБЧ Чебышёва:

$$\frac{\eta_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{\mathrm{P}} p = M\xi_k, \qquad n \to \infty.$$

В условиях ЗБЧ Чебышёва можно доказать, что $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} 0$ при $n \to \infty$. Мы докажем этот результат при более строгих условиях.

Теорема (усиленный ЗБЧ Кантелли)

Пусть $\xi_1, \xi_2 \ldots$ – н.с.в., существуют $M\xi_k$ и $M(\xi_k - M\xi_k)^r \leqslant C_r$ для $r = 2, 3, 4$ при любом $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Доказательство

Заменой $\xi_k \mapsto \xi_k - M\xi_k$ сделаем $M\xi_k = 0$. Пусть $\eta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Попробуем оценить по порядку величины

$$P_n(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} P\left(\left|\frac{1}{n}\eta_n\right| \geqslant \varepsilon\right) = P(|\eta_n| \geqslant n\varepsilon)$$

и показать, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k(\varepsilon)$ (лемма Бореля–Кантелли). В силу независимости с.в. и классического неравенства Чебышёва

$$D\eta_n = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k \leqslant nC_2, \qquad P_n(\varepsilon) \leqslant \frac{D\eta_n}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{C_2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Классическое неравенство не работает, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Применим неравенство Чебышёва вида

$$P(|\eta_n| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{M\eta_n^4}{(n\varepsilon)^4}.$$

Найдём

$$M\eta_n^4 = M\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)^4 = M \sum_{1\leqslant k_1,k_2,k_3,k_4\leqslant n} \xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4} = \sum_{1\leqslant k_1,k_2,k_3,k_4\leqslant n} M(\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}).$$

В этой сумме формально n^4 слагаемых, но если среди k_1, k_2, k_3, k_4 найдётся хотя бы один индекс $k_i\colon k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, то

$$M(\xi_{k_1}\xi_{k_2}\xi_{k_3}\xi_{k_4}) = \underbrace{M\xi_{k_i}}_{=0} \cdot M\left(\prod_{j\neq i} \xi_{k_j}\right) = 0.$$

Поэтому в сумме «выживают» только $M\xi_i^2\xi_j^2$ с $i \neq j$ и $M\xi_j^4$.

Тогда

$$M\eta_n^4 = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} M\xi_i^2\xi_j^2 + \sum_{j=1}^{n} M\xi_j^4 = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} M\xi_i^2\, M\xi_j^2 + \sum_{j=1}^{n} M\xi_j^4 \leqslant \mathcal{N}_{2+2}C_2 + \mathcal{N}_4 C_4,$$

где $\mathcal{N}_{2+2}$ и $\mathcal{N}_4$ – количество слагаемых, в которых два парных индекса, и слагаемых, в которых все индексы равны.

Очевидно, $\mathcal{N}_4 = n$. Найдём $\mathcal{N}_{2+2} = C_n^2 \cdot C_4^2 = 6\dfrac{n(n-1)}{2} = 3n(n-1)$. Отсюда

$$M\eta_n^4 \leqslant 3n(n-1)\cdot C_2 + n\cdot C_4 = O(n^2), \qquad n\to\infty.$$

Следовательно,

$$P(|\eta_n| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{M\eta_n^4}{(n\varepsilon)^4} \leqslant \frac{3n(n-1)\cdot C_2 + n\cdot C_4}{n^4\varepsilon^4} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поэтому для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} P(|\eta_k| \geqslant n\varepsilon) < \infty.$$

Применяем лемму Бореля–Кантелли:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}|\eta_n| \geqslant \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad n \to \infty.$$

Для частоты успеха в биномиальных испытаниях условия теоремы выполнены.

Теорема (усиленный ЗБЧ Бернулли)

В n независимых биномиальных испытаниях с вероятностью успеха p частота успеха сходится при $n \to \infty$ к p с вероятностью 1.

На самом деле в теореме достаточно потребовать $M\xi_k^4 \leqslant C_4$ для любого $k = 1, 2, \ldots,$ потому что в силу неравенства Коши–Буняковского $|M\alpha\beta| \leqslant \sqrt{M\alpha^2 \cdot M\beta^2}$ при $\alpha = \xi_k^2$, $\beta = 1$ имеем

$$M\xi_k^2 = M(\xi_k^2 \cdot 1) \leqslant \sqrt{M\xi_k^4 \cdot 1} = \sqrt{M\xi_k^4} \leqslant \sqrt{C_4} = C_2,$$

при $\alpha = \xi_k^2$, $\beta = \xi_k$ имеем

$$|M\xi_k^3| = |M(\xi_k^2 \cdot \xi_k)| \leqslant \sqrt{M\xi_k^4 \cdot M\xi_k^2} = \sqrt{C_4 \cdot C_2} = C_3,$$

Наконец, $D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2 \geqslant 0$, поэтому $|M\xi_k| \leqslant \sqrt{M\xi_k^2} \leqslant \sqrt{C_2} = C_1$. Центральные моменты ограничены в силу формулы бинома Ньютона:

$$M(\xi_k - M\xi_k)^r = M\sum_{j=1}^{r} C_r^j \xi_k^j (M\xi_k)^{r-j} = \sum_{j=1}^{r} C_r^j \cdot M\xi_k^j \cdot (M\xi_k)^{r-j}.$$