Аппроксимация случайных величин

Мы рассматриваем следующую задачу. Пусть ξ и α – с.в., имеющие совместное распределение и не являющиеся независимыми. Требуется найти

$$\min_{t(\xi)\in\mathbb{T}} M(t(\xi)-\alpha)^2, \tag{A}$$

где $\mathbb{T}$ – некоторый класс функций от ξ. Требуется также найти $t_*(\xi)$, для которой

$$M(t_*(\xi)-\alpha)^2 = \min_{t(\xi)\in\mathbb{T}} M(t(\xi)-\alpha)^2$$

и $h_* = M(t_*(\xi)-\alpha)^2$ (минимальную погрешность аппроксимации).
Решение $t_*(\xi)$ – *наилучшая в среднеквадратичном* (с.к.) *аппроксимация* с.в. α.

Задача 0. Пусть $\mathbb{T}_0 = \{t(\xi) = \mathrm{const} = b \in \mathbb{R}\}$. Требуется найти

$$\min_{t(\xi)\in\mathbb{T}_0} M(t(\xi)-\alpha)^2 = \min_{b\in\mathbb{R}} M(b-\alpha)^2, \tag{A$_0$}$$

другими словами, мы ищем наилучшее приближение с.в. α неслучайной постоянной.
Положим $\mathring{\xi} = \xi - M\xi$, $\mathring{\alpha} = \alpha - M\alpha$, тогда

$$M\mathring{\xi} = 0, \qquad M\mathring{\alpha} = 0, \qquad M\mathring{\xi}^{\,2} = D\xi, \qquad M\mathring{\alpha}^{\,2} = D\alpha.$$

Имеем

$$M(b-\alpha)^2 = M\big(\underbrace{b - M\alpha}_{=b_0} - (\alpha - M\alpha)\big)^2 = M(b_0 - \mathring{\alpha})^2 =$$

$$= b_0^2 - 2b_0 M\mathring{\alpha} + M\mathring{\alpha}^{\,2} = b_0^2 + D\alpha.$$

Отсюда $M(b-\alpha)^2 \geqslant D\alpha$, причём равенство возможно тогда и только тогда, когда $b_0 = 0$, т. е. $b = M\alpha$.
решение задачи (A$_0$): $t_0(\xi) = M\alpha$, погрешность $h_0 = D\alpha$.

Задача 1. Пусть $\mathbb{T}_1 = \{t(\xi) = k\xi + b,\ k, b \in \mathbb{R}\}$. Требуется найти

$$\min_{t(\xi)\in\mathbb{T}_1} M(t(\xi) - \alpha)^2 = \min_{k,b\in\mathbb{R}} M(k\xi + b - \alpha)^2, \tag{A$_1$}$$

другими словами, мы ищем наилучшее приближение случайной величины α линейной функцией $k\xi + b$ от ξ.
Пусть снова $\mathring{\xi} = \xi - M\xi$, $\mathring{\alpha} = \alpha - M\alpha$, тогда

$$M(k\xi+b-\alpha)^2 = M\big(k(\mathring{\xi}+M\xi)+b-(\mathring{\alpha}+M\alpha)\big)^2 = M\big((b-M\alpha+kM\xi)-(\mathring{\alpha}-k\mathring{\xi})\big)^2.$$

Пусть $b_0 = b - M\alpha + kM\xi$ и $\eta = \mathring{\alpha} - k\mathring{\xi}$. Тогда

$$\min_{b\in\mathbb{R}} M(k\xi + b - \alpha)^2 = \min_{b_0\in\mathbb{R}} M(b_0 - \eta)^2.$$

То есть мы имеем задачу 0 для с.в. η. Минимум достигается при $b_0 = M\eta = 0$. Отсюда точка минимума по b есть

$$b_1 = b_1(k) = b_0 + M\alpha - kM\xi = M\alpha - k\,M\xi.$$

Пусть $b = b_1 = M\alpha - k\,M\xi$, ищем минимум по k:

$$M(k\xi+b_1-\alpha)^2 = M\big(k\xi-kM\xi-(\alpha-M\alpha)\big)^2 = M(k\mathring{\xi}-\mathring{\alpha})^2 = k^2M\mathring{\xi}^{\,2}-2kM\mathring{\xi}\mathring{\alpha}+M\mathring{\alpha}^{\,2} =$$

$$= k^2D\xi - 2k\,\mathrm{cov}(\xi,\alpha) + D\alpha.$$

Минимум этого квадратного трёхчлена по переменной k лежит в точке

$$k_1 = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\alpha)}{D\xi},$$

при этом для $b_1 = b_1(k_1)$

$$M(k_1\xi + b_1 - \alpha)^2 = M(k_1\mathring{\xi} - \mathring{\alpha})^2 = \left(\frac{\mathrm{cov}(\xi,\alpha)}{D\xi}\right)^2 D\xi - 2\frac{\mathrm{cov}(\xi,\alpha)}{D\xi}\,\mathrm{cov}(\xi,\alpha) + D\alpha =$$

$$= -\frac{\mathrm{cov}^2(\xi,\alpha)}{D\xi} + D\alpha = \frac{D\xi\,D\alpha - \mathrm{cov}^2(\xi,\alpha)}{D\xi}.$$

Решение задачи 1 (наилучшая аппроксимация $t_1(\xi)$ и её погрешность h_1)

$$t_1(\xi) = k_1\xi + b_1, \qquad k_1 = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\alpha)}{D\xi}, \quad b_1 = M\alpha - k_1 M\xi,$$

$$h_1 = \frac{D\xi\, D\alpha - \operatorname{cov}^2(\xi,\alpha)}{D\xi}.$$

Можно переписать погрешность как

$$h_1 = \frac{D\xi D\alpha}{D\xi}\left(1 - \frac{\operatorname{cov}^2(\xi,\alpha)}{D\xi D\alpha}\right) = D\alpha\big(1 - \operatorname{cor}^2(\xi,\alpha)\big),$$

Погрешность тем меньше, чем ближе модуль коэффициента корреляции к единице, при этом $h_1 = 0$, когда $\operatorname{cor}(\xi,\alpha) = \pm 1$, т. е. между ξ и α с вероятностью единица есть линейная связь.

Общая задача. Пусть $\mathbb{T}_* = \{$с.в. $t(\xi)\colon\ M(t(\xi)-\alpha)^2 < \infty\}$. Требуется найти

$$\min_{t(\xi)\in\mathbb{T}_*} M(t(\xi)-\alpha)^2 = \min_{t(\xi)\in\mathbb{T}_*} M_{\xi,\alpha}(t(\xi)-\alpha)^2 \qquad (\mathrm{A}_*)$$

(математическое ожидание вычисляется по совместному распределению ξ, α). Воспользуемся формулой последовательного усреднения

$$M_{\xi,\alpha}(t(\xi)-\alpha)^2 = M_\xi M_{\alpha|\xi}(t(\xi)-\alpha)^2.$$

В $M_{\alpha|\xi}(t(\xi)-\alpha)^2$ с.в. ξ фиксирована, $\xi = x$, $t(\xi) = t(x) = b$. Тогда согласно решению задачи 0

$$\min M_{\alpha|\xi}(t(\xi)-\alpha)^2$$

достигается при $t_*(\xi) = M(\alpha|\xi)$, а погрешность равна $h_* = M_\xi D(\alpha|\xi)$.

Например, если существует совместная плотность $p_{\xi,\alpha}(\cdot)$ случайных величин ξ и α, то

$$M(t(\xi)-\alpha)^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \big(t(x)-a\big)^2 p_{\xi,\alpha}(x,a)\,dx\,da =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \big(t(x)-a\big)^2 p_{\alpha|\xi}(a|x) p_\xi(x)\,dx\,da =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(t(x)-a\big)^2 p_{\alpha|\xi}(a|x)\,da \Bigg) p_\xi(x)\,dx.$$

Выражение в больших скобках – это $M\big((t(\xi)-\alpha)^2|\xi=x\big)$, которое затем усредняется по ξ.

Перепишем его как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(t(x) - a\big)^2 p_{\alpha|\xi}(a|x)\, da = t^2(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha|\xi}(a|x)\, da -$$

$$-2t(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} a p_{\alpha|\xi}(a|x)\, da + \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^2 p_{\alpha|\xi}(a|x)\, da.$$

В правой части интегралы равны

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha|\xi}(a|x)\, da = 1, \qquad M_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a p_{\alpha|\xi}(a|x)\, da = M(\alpha|\xi = x),$$

$$M_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^2 p_{\alpha|\xi}(a|x)\, da = M(\alpha^2|\xi = x).$$

Тогда имеем

$$M(t(\xi) - \alpha)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[t^2(x) - 2M_1(x)t(x) + M_2(x)\right] p_\xi(x)\, dx.$$

Фиксируем x, тогда под интегралом $t^2 - 2M_1 t + M_2$. Минимум по t достигается в точке $t_* = M_1$. Отсюда, восстанавливая зависимость от x, имеем $t_*(x) = M_1(x) = M(\alpha|\xi = x)$ и $t_*(\xi) = M(\alpha|\xi)$. Погрешность равна

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[M^2(\alpha|\xi = x) - 2M(\alpha|\xi = x) \cdot M(\alpha|\xi = x) + M(\alpha^2|\xi = x)\right] p_\xi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[M(\alpha^2|\xi = x) - M^2(\alpha|\xi = x)\right] p_\xi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D(\alpha|\xi = x) p_\xi(x)\, dx = M_\xi D(\alpha|\xi).$$

Сходимости последовательностей случайных величин

Рассмотрим последовательность с. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$, заданных на одном и том же $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и с. в. ξ на том же $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.Что такое $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$?

Определение 1

Последовательность $\{\xi_n\}$ сходится *с вероятностью единица* (*почти наверное*) к с. в. ξ ($\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$), если

$$P\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1.$$

Определение 2

Последовательность $\{\xi_n\}$ сходится *по вероятности* к с. в. ξ ($\xi_n \xrightarrow{\text{P}} \xi$), если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\bigl(|\xi_n - \xi| < \varepsilon\bigr) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\bigl(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\bigr) = 0.$$

Определение 3

Последовательность с. в. $\{\xi_n\}$ сходится *по распределению* к с. в. ξ ($\xi_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \xi$), если

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$$

в каждой фиксированной точке x, в которой $F_\xi(\,\cdot\,)$ непрерывна.

Определение 4

Последовательность $\{\xi_n\}$ *сходится в среднем порядка* r к с. в. ξ, если

$$\lim_{n\to\infty} M|\xi_n - \xi|^r = 0.$$

В среднем квадратичном (при $r = 2$) ($\xi_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi$): $M(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Иерархия сходимостей

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \xi.$$

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \xi \quad {\color{red}\Longrightarrow} \quad \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi \qquad\qquad\qquad .$$

«Красное» следствие напрямую вытекает из неравенства Чебышёва:

$$P\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{M|\xi_n - \xi|^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Если $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{d}} a$, где a – неслучайное число, то $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{d}} a \implies \xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$.

Сходимость с вероятностью единица

Вспомним

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Лемма 1

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \text{ где } n \leqslant \infty.$$

Доказательство

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2),$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \leqslant P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

и т. д.

Отсюда $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$ для любого конечного n. Для $n = \infty$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

причём $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1} \implies B_n \subset B_{n+1}$. Тогда

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Пусть $\omega_0\colon \xi_n(\omega_0) \to \xi(\omega_0)$ при $n \to \infty$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}\colon \ \forall k \geqslant n \quad |\xi_k(\omega_0) - \xi(\omega_0)| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \omega_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega\colon |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} = \liminf_{n\to\infty} \big\{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\big\}.$$

Таким образом, $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} \big\{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\big\}\Big) = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \big\{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big\}\Big) = P\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)\Big) = 0,$$

где мы ввели обозначение

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}.$$