1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – некоторое вероятностное пространство. Пусть $\mathbb{T}$ – подмножество действительной прямой.

Определение 1.1. *Случайным процессом* называется семейство случайных величин $\{\xi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in \mathbb{T}\}$.

Как обычно в теории вероятностей, мы будем опускать зависимость от элементарного исхода и писать $\xi(t)$ вместо $\xi(\omega, t)$, если эта зависимость не является существенной для наших рассуждений.

Как правило, полагают, что $\mathbb{T} = \{t \geqslant 0\}$, и в этом случае параметру t можно придать смысл времени. Однако природа множества $\mathbb{T}$ может быть и другой. Конечное множество $\mathbb{T} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ приводит нас к понятию n-мерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k = \xi(t_k)$, и тем самым мы возвращаемся в рамки теории вероятностей. Таким образом, естественно полагать, что множество $\mathbb{T}$ бесконечно. Если множество $\mathbb{T}$ счётно, $\mathbb{T} = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, или *случайной последовательностью*. Для многих физических моделей характерно, что множество $\mathbb{T}$ лежит не на числовой прямой, а в многомерном пространстве, например в обычном трёхмерном евклидовом пространстве. Определение 1.1 в этом случае остаётся без изменений, а случайный процесс $\xi(t)$ как правило называют *случайным полем*, или *случайной функцией*. Поскольку математические основы теории случайных процессов практически не зависят от того, какова размерность множества $\mathbb{T}$, далее мы будем считать, что параметр t – действительное число, более того, выбирать в качестве множества $\mathbb{T}$ счётное множество $\{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, или множество $\mathbb{R}_+ = \{t \geqslant 0\}$, или конечный интервал $[0, T]$, $0 < T < \infty$.

Другим направлением обобщений определения 1.1 является изменение размерности пространства значений функции $\xi(\,\cdot\,, t)$, заданной на множестве элементарных исходов Ω: мы можем полагать, что $\xi(\omega, t)$ – точка не на числовой прямой, а в многомерном пространстве. Особенно часто рассматриваются случайные процессы со значениями на комплексной плоскости. В этом случае

$$\xi(t) = \xi^{\mathrm{Re}}(t) + i\xi^{\mathrm{Im}}(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}, \tag{1.1}$$

где $\xi^{\mathrm{Re}}(t)$, $\xi^{\mathrm{Im}}(t)$, $\rho(t)$, $\varphi(t)$ для каждого фиксированного $t \in \mathbb{T}$ суть случайные величины, заданные на Ω, в их стандартном понимании. Далее, ввиду особой важности комплекснозначных (обычно для краткости говорят просто «комплексных») случайных процессов в физике, при формулировке определений и теорем мы, если это необходимо, будем специально оговаривать, о каком процессе, действительном или комплексном, идёт речь.

Введем некоторые термины.

Определение 1.2. Пусть значение параметра $t \in \mathbb{T}$ фиксировано. Случайная величина $\xi_t(\omega) = \xi(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, называется *сечением случайного процесса в точке* t. Пусть элементарный исход $\omega \in \Omega$ фиксирован. Тогда числовая (действительно- или комплекснозначная) функция $\xi_\omega(t)$, $t \in \mathbb{T}$, есть *траектория* (говорят также *реализация*, или *выборочная функция*) случайного процесса.

Обратим внимание на то, что мы обозначаем фиксированные аргументы $t \in \mathbb{T}$ или $\omega \in \Omega$ нижними индексами, чтобы отличать соответственно случайные величины или неслучайные числовые функции от случайного процесса. Мы, как обычно, будем далее опускать зависимость от ω в сечении ξ_t случайного процесса.

Примем ещё одно соглашение об обозначениях. Мы будем часто обозначать через $\xi(t)$ и сечение, и сам случайный процесс, просто оговаривая (если есть риск непонимания природы $\xi(t)$ в каждом конкретном случае), о чём идёт речь; для случайных процессов мы также часто будем указывать, что t не фиксировано, а пробегает некое множество, т. е. писать $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$.

Пример 1.1. Пусть случайный процесс задан формулами (ниже α – случайная величина)

$$\xi(t) = t^{\alpha}, \qquad P(\alpha = 1) = P(\alpha = -1) = \frac{1}{2}, \qquad t > 0.$$

Определить, как выглядят сечения и траектории данного случайного процесса.

Решение. Фиксируем $t > 0$, получаем дискретную случайную величину ξ_t, равновероятно принимающую два значения:

$$P(\xi_t = t) = P(\xi_t = t^{-1}) = \frac{1}{2}.$$

Различные сечения случайного процесса суть случайные величины, имеющие распределения, сосредоточенные в двух точках, эти точки зависят от того, какое значение $t > 0$ фиксировано. Заметим, что при $t = 1$ данная случайная величина принимает значение 1 с вероятностью единица, т. е. не является случайной.

Теперь фиксируем элементарный исход ω, другими словами, фиксируем значение случайной величины $\alpha = \alpha(\omega)$. Если элементарный исход ω таков, что $\alpha(\omega) = 1$, то $\xi_\omega(t) = t$, и траектория случайного процесса представляет собой прямую линию. Если же $\alpha(\omega) = -1$, то $\xi_\omega(t) = 1/t$, и траектория случайного процесса – гипербола (оба варианта траектории заданы при $t > 0$).

Отметим также, что данный случайный процесс по сути не является случайным: если в какой-либо момент времени мы находись на траектории, скажем, $\xi(t) = t$, то мы можем с достоверностью утверждать, что во все последующие и предыдущие моменты времени мы этой траектории не покинем. Случайным является только выбор траектории в начальный момент времени.

1.1. Конечномерные распределения случайного процесса.

Определение 1.3. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – действительный случайный процесс. Зададим функцию $F_\xi^{(n)} \colon (\mathbb{R} \otimes \mathbb{T})^n \mapsto \mathbb{R}$ равенством

$$\begin{gathered} F_\xi^{(n)}(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n), \\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \qquad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}, \qquad n = 1, 2, \ldots\,. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Функция $F_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$ называется *n-мерной функцией распределения случайного процесса $\xi(t)$.*

По сути n-мерная функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ – это совместная функция распределения n случайных величин $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$, однако она рассматривается как функция $2n$ аргументов:

• n аргументов $x_1, \dots, x_n$, каждый из которых произвольно меняется на действительной прямой (эти аргументы по своему смыслу полностью идентичны аргументам обычной совместной функции распределения n случайных величин);

• n аргументов $t_1, \dots, t_n$, каждый из которых выбирается произвольно в множестве $\mathbb{T}$ (эти аргументы для совместной функции распределения n случайных величин являются параметрами).

Значения функции распределения, как и любая другая вероятность, лежат в отрезке $[0, 1]$.

На практике чрезвычайно редко используются n-мерные функции распределения при $n > 2$, т. е. рассматриваются исключительно одно- и двумерные функции распределения.

Непосредственно из определения (1.2) следует, что n-мерная функция распределения должна удовлетворять следующему условию: если $\{k_1, \dots, k_n\}$ – произвольная перестановка множества индексов $\{1, \dots, n\}$, то

$$F(x_{k_1}, t_{k_1}; \dots; x_{k_n}, t_{k_n}) \equiv F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n); \tag{1.3}$$

например, $F(x_1, t_1; x_2, t_2) = F(x_2, t_2; x_1, t_1)$ для всех $x_{1,2} \in \mathbb{R}$, $t_{1,2} \in \mathbb{T}$.

Из свойств совместной функции распределения случайных величин вытекают следующие свойства n-мерной функций распределения случайного процесса. Выберем произвольным образом все аргументы x_k, кроме одного, например x_n (как вытекает из предыдущего свойства, номер выделенного аргумента несуществен), и зафиксируем их. Также выберем произвольно и зафиксируем $t_1, \dots t_n \in \mathbb{T}^n$. Тогда n-мерная функцию распределения $F^{(n)}(\,\cdot\,)$ как функция одной переменной $x_n \in \mathbb{R}$ непрерывна слева в каждой точке $x_n = a$,

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)\big|_{x_n \to a-0} = F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, a, t_n); \tag{1.4}$$

не убывает,

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) \leqslant F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, \tilde{x}_n, t_n), \quad x_n \leqslant \tilde{x}_n; \tag{1.5}$$

удовлетворяет двум предельным свойствам (во втором, разумеется, $n > 1$)

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)\big|_{x_n \to -\infty} = 0, \tag{1.6}$$

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)\big|_{x_n \to +\infty} = F^{(n-1)}(x_1, t_1; \dots, x_{n-1}, t_{n-1}), \tag{1.7}$$

где $F^{(n-1)}(\,\cdot\,)$ – $(n-1)$-мерная функция распределения случайного процесса. Напомним, что свойства (1.4)–(1.7) верны при любых фиксированных $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ и $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$. Если же мы «отпустим» все x-переменные и устремим их к $+\infty$, то

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)\big|_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots \\ x_n \to +\infty}} = 1, \qquad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}. \tag{1.8}$$

Оказывается, что свойства (1.4)–(1.8) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функции $F^{(n)}(\,\cdot\,)\colon (\mathbb{R} \otimes \mathbb{T})^n \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, были конечномерными функциями распределения некоторого случайного процесса (теорема Колмогорова).

Для комплексных случайных процессов (1.1), заданных как $\xi(t) = \xi^{\mathrm{Re}}(t) + i\xi^{\mathrm{Im}}(t)$ или как $\xi(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$, также можно определить n-мерную функцию распределения. Это будет функция, заданная как совместная функция распределения $2n$ случайных величин

$$\xi^{\mathrm{Re}}(t_1), \ldots, \xi^{\mathrm{Re}}(t_n),\ \xi^{\mathrm{Im}}(t_1), \ldots, \xi^{\mathrm{Im}}(t_n)$$

или

$$\rho(t_1), \ldots \rho(t_n),\ \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)$$

в зависимости от формы представления комплексного случайного процесса. Свойства (1.4)–(1.8) сохраняют свою силу за исключением того, что перестановка в (1.3), разумеется, должна производиться согласованно в каждом из n наборов аргументов. Приведем для пояснения этого замечания аналог равенства

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = F(x_2, t_2; x_1, t_1)$$

для процесса $\xi(t) = \xi^{\mathrm{Re}}(t) + i\xi^{\mathrm{Im}}(t)$:

$$F(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = F(x_2, y_2, t_2; x_1, y_1, t_1),$$

где аргументы функции распределения сгруппированы по три в соответствии с определением

$$F(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = P(\xi^{\mathrm{Re}}(t_1) < x_1, \xi^{\mathrm{Im}}(t_1) < y_1; \xi^{\mathrm{Re}}(t_2) < x_2, \xi^{\mathrm{Im}}(t_2) < y_2).$$

Далее мы часто будем использовать сокращённые обозначения. Во-первых, вместо $x_1, \ldots, x_n$ мы будем писать просто x и аналогично введем многомерную переменную t (размерность этих переменных обязательно равна размерности функции распределения). Во-вторых, мы часто будем опускать нижний индекс ξ в обозначении $F_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$, а также, если мы говорим о функции конкретного фиксированного порядка, не будем писать и верхний индекс, используя для всех функций распределения общее обозначение $F(\,\cdot\,)$:

$$\begin{aligned} &F(x,t) = P(\xi(t) < x), && x \in \mathbb{R}, && t \in \mathbb{T}, \\ &F(x,t) = P(\xi(t_1) < x_1,\, \xi(t_2) < x_2), && x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, && t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Примем ещё одно соглашение. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $t = (t_1, \ldots, t_n)$ – многомерные переменные. Неравенство $x \leqslant \xi(t) < x + dx$ будем понимать как одновременное выполнение неравенств вида $x_k \leqslant \xi(t_k) < x_1 + dx_k$:

$$x \leqslant \xi(t) < x + dx \quad \iff \big\{x_1 \leqslant \xi(t_1) < x_1 + dx_1, \ldots, x_n \leqslant \xi(t_n) < x_n + dx_n\big\}.$$

При этом, очевидно, $P(x \leqslant \xi(t) < x + dx) = F(x + dx, t) - F(x,t) = d_x F(x,t)$, где $F(\,\cdot\,)$ – n-мерная функция распределения случайного процесса, $d_x F$ – её дифференциал (приращение) по многомерной переменной x.

Определение 1.4. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – действительный случайный процесс. Если приращение n-мерной функции распределения $F_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$ по переменной x при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{T}^n$ имеет вид

$$F_\xi^{(n)}(x + dx, t) - F_\xi^{(n)}(x,t) = p_\xi^{(n)}(x,t)\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}^n, \tag{1.10}$$

то говорят, что случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, имеет *n-мерную плотность распределения* $p_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$. Напомним, что $dx = dx_1 \ldots dx_n$.

Пример 1.2. Пусть случайная величина ν имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, а случайный процесс задан как $\xi(t) = t + \nu$, $t > 0$. Найдем функции распределения данного случайного процесса.

Решение. Имеем для $n = 1$

$$F(x, t) = P(\xi(t) < x) = P(t + \nu < x) = P(\nu < x - t) = F_\nu(x - t),$$

где $F_\nu(\,\cdot\,)$ – функция распределения случайной величины ν, имеющей нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$,

$$F_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

Поскольку случайная величина ν имеет плотность распределения $p_\nu(\,\cdot\,)$, мы можем записать

$$d_x F(x, t) = F_\nu((x + dx) - t) - F_\nu(x - t) = p_\nu(x - t)\, dx,$$
$$p_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < +\infty.$$

Мы получили, что наш случайный процесс имеет одномерную плотность распределения: $p(x, t) = p_\nu(x - t)$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

Для $n = 2$ имеем аналогично

$$F(x, t) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2) = P(\nu < x_1 - t_1, \nu < x_2 - t_2).$$

Понятно, что система неравенств $\nu < x_1 - t_1$ и $\nu < x_2 - t_2$ эквивалента неравенству $\nu < x_1 - t_1$, если $x_1 - t_1 < x_2 - t_2$, и неравенству $\nu < x_2 - t_2$, если $x_2 - t_2 < x_1 - t_1$. Другими словами,

$$F(x, t) = P(\nu < x_* - t_*), \qquad x_* - t_* = \min(x_1 - t_1, x_2 - t_2). \tag{1.11}$$

Аналогично, формула

$$F(x, t) = F_\nu(x_* - t_*), \qquad x_* - t_* = \min(x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n),$$

очевидно, задаёт n-мерную функцию распределения нашего случайного процесса.

Вернёмся к $n = 2$ и попробуем найти двумерную плотность распределения:

$$\begin{aligned} d_x F(x, t) &= P(x_1 \leqslant \xi(t_1) < x_1 + dx_1, x_2 \leqslant \xi(t_2) < x_2 + dx_2) = \\ &= P(x_1 - t_1 \leqslant \nu < x_1 + dx_1 - t_1, x +_2 - t_2 \leqslant \nu < x_2 + dx_2 - t_2) = \\ &= P\big(\nu \in [z_1, z_1 + dx_1) \cap [z_2, z_2 + dx_1)\big), \qquad z_1 = x_1 - t_1, \quad z_2 = x_2 - t_2. \end{aligned}$$

Поскольку dx_1 и dx_2 бесконечно малы, интервалы $[z_1, z_1 + dx_1)$ и $[z_2, z_2 + dx_2)$ имеют непустое пересечение, если и только если $z_1 = z_2$. В самом деле, если, скажем, мы имеем $z_1 < z_2$, то, выбирая достаточно малое dx_1, получим $z_1 + dx_1 < z_2$, при этом интервалы пересекаться не будут. Если же $z_1 = z_2 = z$, то рассматриваемое пересечение равно $[z, z + dz)$, где через dz мы обозначили (бесконечно малое) приращение $\min(dx_1, dx_2)$. Отсюда

$$d_x F(x, t) = P(z \leqslant \nu < z + dx) = p_\nu(z)\, dz, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

где

$$p_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad z = x_1 - t_1 = x_2 - t_2, \qquad dz = \min(dx_1, dx_2).$$

Таким образом, приращение $d_xF(x,t)$ как функция, заданная в четырёхмерном пространстве (функция от двух двумерных переменных $x = (x_1, x_2)$ и $t = (t_1, t_2)$) отлично от нуля только на трёхмерной гиперплоскости, на которой $x_1 - t_1 = x_2 - t_2$. При этом $d_xF(x,t)$ имеет (первый) порядок малости $dz = \min(dx_1, dx_2)$ и не пропорционально $dx_1\, dx_2$, как это предписано формулой (1.10). Таким образом, двумерная плотность распределения нашего случайного процесса не существует. Тем более не существуют и плотности распределения более высоких размерностей. Очевидно, что при $n > 2$ приращение $d_xF(x,t)$ отлично от нуля только на гиперплоскости размерности $2n - (n-1) = n+1$:

$$d_xF(x,t) = P(z \leqslant \nu < z + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, dz, \qquad z = x_1 - t_1 = \cdots = x_n - t_n,$$

и $dz = \min(dx_1, \ldots, dx_n)$.

1.2. Моментные функции случайного процесса.

Определение 1.5. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – действительный случайный процесс. Если при каждом $t \in \mathbb{T}$ существует математическое ожидание случайной величины $\xi(t)$, то функция $m(\,\cdot\,)\colon \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$, заданная равенством

$$m(t) = M\xi(t), \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{1.12}$$

называется *математическим ожиданием случайного процесса* $\xi(t)$.

Используя определение математического ожидания, запишем явную формулу

$$M\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF(x,t), \quad \text{если верно, что} \quad \int_{\mathbb{R}} |x|\, dF(x,t) < \infty, \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{1.13}$$

Здесь $F(\,\cdot\,)$ – одномерная функция распределения случайного процесса, а интеграл понимается в смысле Лебега–Стилтьеса. Условие абсолютной сходимости интеграла в второй части (1.13) задаёт условие существования математического ожидания.

Для комплексного случайного процесса математическое ожидание определяется в соответствии со свойством линейности:

$$M\xi(t) = M\big(\operatorname{Re}\xi(t) + i\operatorname{Im}\xi(t)\big) = M\operatorname{Re}\xi(t) + iM\operatorname{Im}\xi(t), \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{1.14}$$

при условии, что математические ожидания реальной и мнимой частей случайного процесса существуют. Таким образом определённое математическое ожидание есть функция, заданная на $\mathbb{T}$, со значениями в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Очевидно, что если $\bar\xi(t) = \operatorname{Re}\xi(t) - i\operatorname{Im}\xi(t)$ есть процесс, комплексно-сопряжённый процессу $\xi(t)$, то $M\bar\xi(t) = \overline{M\xi(t)}$.

Определение 1.6. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – комплексный случайный процесс. Если при каждых $t, s \in \mathbb{T}$ существуют математические ожидания $M\xi(t)$ и $M\xi(t)\bar\xi(s)$, то функция $R\colon \mathbb{T} \otimes \mathbb{T} \mapsto \mathbb{C}$, заданная равенством

$$R(t,s) = M\big(\xi(t) - M\xi(t)\big)\overline{\big(\xi(s) - M\xi(s)\big)}, \qquad t, s \in \mathbb{T}, \tag{1.15}$$

называется *ковариационной функцией случайного процесса* $\xi(t)$.

Для действительного случайного процесса определение (1.15) принимает вид

$$R(t,s) = M\big(\xi(t) - M\xi(t)\big)\big(\xi(s) - M\xi(s)\big), \qquad t,s \in \mathbb{T}. \tag{1.16}$$

Выражения в правых частях равенств (1.15) или (1.16) суть коэффициенты ковариации случайных величин $\xi(t)$ и $\xi(s)$. Также их можно переписать как

$$R(t,s) = M\xi(t)\bar{\xi}(s) - M\xi(t)M\bar{\xi}(s), \qquad t,s \in \mathbb{T}, \tag{1.17}$$

в случае действительного процесса $\bar{\xi}(s)$, разумеется, следует заменить на $\xi(s)$.

Положим в предыдущих равенствах $t = s$.

Определение 1.7. Функция $D\colon \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}_+$, заданная формулой

$$D\xi(t) = M\big|\xi(t) - M\xi(t)\big|^2 \overset{\xi(t)=\bar{\xi}(t)}{=\!=} M\big(\xi(t) - M\xi(t)\big)^2, \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{1.18}$$

называется *дисперсией случайного процесса* $\xi(t)$.

В последнем определении мы использовали обозначение $\mathbb{R}_+ = \{x \geqslant 0\}$ для положительной части действительной оси, в правой части первого равенства под знаком математического ожидания стоит модуль комплекснозначной функции, а второе равенство даёт определение дисперсии действительного процесса.

Свойства моментных функций случайного процесса вытекают из общих свойств математического ожидания. Мы здесь отметим только несколько из них.

Ковариационная функция удовлетворяет равенству $R(s,t) = \overline{R(t,s)}$, в случае действительного процесса $R(s,t) = R(t,s)$ для любых $t,s \in \mathbb{T}$.

Для любого набора комплексных чисел $z_1,\dots,z_n$ и любых значений $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{T}$ для корреляционной функции (1.15) имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j) z_i \bar{z}_j \geqslant 0. \tag{1.19}$$

Положим $\xi^\circ(t) = \xi(t) - M\xi(t)$, тогда $\bar{\xi}^\circ(s) = \bar{\xi}(s) - M\bar{\xi}(t) = \overline{\xi(s) - M\xi(s)}$, и мы можем записать

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j) z_i \bar{z}_j &= \sum_{i,j=1}^{n} M\xi^\circ(t_i)\bar{\xi}^\circ(t_j) z_i \bar{z}_j = M\left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi^\circ(t_i)\bar{\xi}^\circ(t_j) z_i \bar{z}_j\right) = \\
&= M\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\xi^\circ(t_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j\bar{\xi}^\circ(t_j)\right) = M\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\xi^\circ(t_i) \cdot \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\xi^\circ(t_j)\right)}\right) = \\
&= M\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\xi^\circ(t_i)\right|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

В случае действительного процесса, разумеется, следует заменить комплексные числа $z_1,\dots,z_n$ на действительные, неравенство (1.19) при этом примет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j) z_i z_j \geqslant 0, \qquad z_1,\dots,z_n \in \mathbb{R}, \quad t_1,\dots,t_n \in \mathbb{T},$$

а его доказательство проводится, как и выше, следует только убрать знаки комплексного сопряжения, а в последнем выражении можно заменить квадрат модуля суммы на просто квадрат суммы.

Из неравенства Чебышёва вытекает, что если дисперсия случайного процесса равна нулю в точке $t \in \mathbb{T}$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| > \varepsilon\big) \leqslant \frac{M\big|\xi(t) - M\xi(t)\big|^2}{\varepsilon} = \frac{D\xi(t)}{\varepsilon} = 0,$$

таким образом, $P\big(\big|\xi(t)-M\xi(t)\big| > \varepsilon\big) = 0$, другими словами, $P\big(\big|\xi(t)-M\xi(t)\big| \leqslant \varepsilon\big) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$, и мы имеем

$$P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| = 0\big) = P\big(\xi(t) = M\xi(t)\big) = 1,$$

то есть при данном t сечение ξ_t случайного процесса по сути не является случайной величиной: оно с вероятностью единица равно константе (величине $M\xi(t)$).

Пример 1.3. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – случайные процессы из примеров 1.1 и 1.2. Найти их математические ожидания и ковариационные функции.

Решение. Имеем для всех $t > 0$

$$P(\xi_1(t) = t) = P(\xi_1(t) = t^{-1}) = \frac{1}{2}, \qquad M\xi_1(t) = t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} = \frac{t + 1/t}{2};$$

для процесса из примера 1.2

$$M\xi(t) = M(t + \nu) = t + M\nu = t,$$

поскольку t – неслучайный параметр, а случайная величина ν имеет нормальное распределение с параметром $\mu = M\nu = 0$.

Для расчёта ковариационной функции воспользуемся формулой (1.17) в её варианте для действительных процессов:

$$R(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s), \qquad t, s > 0,$$

Получаем для процесса $\xi_1(t)$ следующее: $\xi_1(t)\xi_1(s) = t^\alpha \cdot s^\alpha = (ts)^\alpha$, поэтому

$$M\xi_1(t)\xi_1(s) = M(ts)^\alpha = (ts)^1 \cdot \frac{1}{2} + (ts)^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ts + 1/ts}{2}.$$

В результате

$$R(t, s) = \frac{ts + 1/ts}{2} - \frac{t + 1/t}{2}\frac{s + 1/s}{2} = \frac{ts - s/t - t/s + 1/ts}{4}, \qquad t, s > 0.$$

Для процесса $\xi_2(t)$ имеем

$$M\xi(t)\xi(s) = M(t + \nu)(s + \nu) = ts + (t + s)M\nu + M\nu^2 = ts + 1,$$

где мы воспользовались тем, что $M\nu = 0$, $M\nu^2 = D\nu + (M\nu)^2 = D\nu = \sigma^2 = 1$. Отсюда

$$R(t, s) = ts + 1 - ts = 1, \qquad t, s > 0.$$

Итак, в данном случае ковариационная функция тождественно равна единице.

Положив $t = s$, получим дисперсии:

$$D\xi_1(t) = \frac{t^2 - 2 + 1/t^2}{4} = \left(\frac{t - 1/t}{2}\right)^2, \qquad D\xi_2(t) = 1, \qquad t > 0.$$

Эти выражения, впрочем, можно было получить и непосредственно, рассчитав дисперсии случайных велчин t^α и $t + \nu$.

1.3. Независимость приращений и одородность процесса. Отметим, что в теории вероятностей часто отождествляют случайную величину и её распределение, другими словами, задавая случайную величину, определяют не функцию $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, а её функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$. Так, мы говорим, например, о нормально распределённых случайных величинах, подчёркивая именно характер их распределения, и не интересуемся тем стохастическим экспериментом, который лежит в основе их случайности.

Аналогично задание случайного процесса почти всегда понимают как задание семейства его конечномерных распределений. Однако в общем случае определить многомерные распределения затруднительно, да и формулы весьма громоздки. В теории вероятностей можно существенно упростить выкладки, предположив независимость случайных величин. Возникает вопрос, как задаётся независимость в теории случайных процессов?

Простейшей является идея положить любые два сечения процесса ξ_t и ξ_s независимыми при $t \neq s$. Или, если рассуждать в терминах моментных функций, считать, что $R(t, s) = 0$ при $t \neq s$. Такой случайный процесс называется *дельта-коррелированным.* Однако трудно представить себе физическое явление, математической моделью которого является дельта-коррелированный процесс: в самом деле, едва ли сечения независимы в сколь угодно близкие моменты времени. Куда более реалистичным является следующее предположение.

Пусть $0 < t_1 < t_2$. Назовём *приращением случайного процесса* (от момента времени t_1 к моменту времени t_2) случайную величину $\xi(t_2) - \xi(t_1)$. Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, является *процессом с независимыми приращениями*, если для любого $n = 2, 3, \dots$ и для любых $t_1, \dots, t_n$ таких, что $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n$, случайные величины $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$ независимы (в совокупности).

Дадим ещё одно определение. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, является *однородным* (во времени), если для любых $0 \leqslant s < t$ распределение приращения $\xi(t+s)-\xi(s)$ зависит только от t, но не зависит от s. Смысл этого определения в том, что вероятностное поведение приращения определяется только длиной временно́го промежутка, на котором рассматривается приращение, но не положением этого промежутка на оси времени. Для однородных процессов мы будем использовать обозначение $\xi(t + s) - \xi(s) = \Delta\xi(t)$, памятуя о том, что случайная величина это в сущности её распределение.

Итоги. Случайный процесс есть семейство случайных величин, зависящих от параметра t. Как правило, полагают, что этот параметр – действительное число, но возможны и другие способы его задания. Также, как правило, рассматриваются случайные процессы со значениями в поле действительных или комплексных чисел. Выбрав одну случайную величину из этого семейства при заданном значении параметра t, мы получим так называемое сечение случайного процесса в точке t. Конечномерные (n-мерные) распределения случайного процесса суть совместные распределения n случайных величин, представляющих собой сечения случайного процесса в любых точках $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$.

Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса рассчитываются как математическое ожидание и дисперсия сечения случайного процесса в каждой точке $t \in \mathbb{T}$. Для их расчёта необходимо знать одномерную функцию распределения. Значение ковариационной функции случайного процесса равно коэффициенту ковариации двух сечений случайного процесса в точках $t, s \in \mathbb{T}$. Для его расчёта необходимо знать двумерную функцию распределения. Исследование функций распределения и моментных функций, а также методы их расчёта и анализа опираются на стандартные утверждения и теоремы теории вероятностей.

Важными свойствами распределений случайных процессов являются независимость приращений процесса для непересекающихся промежутков времени и однородность процесса как независимость распределения приращения от начала отсчёта времени. Эти свойства, с одной стороны, физически реальны, с другой стороны, существенно облегчают математическое исследование процесса.

2. ПРОЦЕСС ПУАССОНА

В этом разделе мы рассмотрим один из самых известных случайных процессов, который может служить математической моделью широчайшего круга явлений.

2.1. Определение и основные характеристики процесса Пуассона.

Определение 2.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, называется *процессом Пуассона*, если его приращения как случайные величины удовлетворяют следующим условиям:

- однородность процесса во времени: для любых $t > s > 0$ распределение приращения $\xi(t) - \xi(s) = \Delta\xi(t-s)$ зависит только от $t - s$;
- независимость приращений: для любого $n = 2, 3, \ldots$ и любых $t_0, t_1, \ldots, t_n$ таких, что $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, приращения $\Delta\xi(t_k - t_{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots, n$, как случайные величины независимы;
- каждое его приращение распределено по Пуассону: для $t > s > 0$

$$P(\xi(t) - \xi(s) = m) = \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!}\, e^{-\lambda(t-s)}, \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

(здесь $\lambda = \text{const}$, $0 < \lambda < \infty$).

- Наложим также условие, то процесс начинается в нуле: $P(\xi(0) = 0) = 1$.

Непосредственно из определения вытекает, что сечение процесса для $t > 0$ можно записать как $\xi(t) = \xi(t) - \xi(0)$, и оно распределено по Пуассону:

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

Также можно заметить, что это согласуется с $P(\xi(0) = 0) = 1$, если в (2.2) формально положить $t = 0$. Кроме того, условие однородности процеса согласовано с (2.1): распределение приращения полностью определяется параметром $\lambda(t-s)$.

Определим вероятностные характеристики процесса Пуассона.

Найдём n-мерное распределение процесса Пуассона, т. е. для $t_1, t_2, \ldots, t_n$ вычислим

$$P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \ldots, \xi(t_n) = m_n). \tag{2.3}$$

В силу независимости распределения от порядка событий $\xi(t_j) = m_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, мы без ограничения общности можем считать, что $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Далее, поскольку приращение $\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})$ распределено по Пуассону, данная случайная величина неотрицательна (т. е. $\xi(t_j) \geqslant \xi_{j-1}$) с вероятностью единица, следовательно, $P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \ldots, \xi(t_n) = m_n) \neq 0$, только если $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n$. Для краткости последующих формул положим $t_0 = 0$, $m_0 = 0$. Нетрудно заметить, что равносильны события

$$\xi(t_1) = m_1,\ \xi_2(t_2) = m_2,\ \ldots\ ,\ \xi(t_n) = m_n$$

и

$$\Delta\xi(t_1 - t_0) = m_1 - m_0\ , \Delta\xi(t_2 - t_1) = m_2 - m_1,\ \ldots\ ,\ \Delta\xi(t_n - t_{n-1}) = m_n - m_{n-1};$$

при этом приращения $\Delta\xi(t_j - t_{j-1}) = \xi(t_j) - \xi(t_{j-1})$, $j = 1, \ldots, n$, независимы и в соответствии с определением

$$P(\Delta\xi(t_j - t_{j-1}) = m_j - m_{j-1}) = \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{m_j - m_{j-1}}}{(m_j - m_{j-1})!}\, e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \ldots, \xi(t_n) = m_n) = \\
&= P(\Delta\xi(t_1 - t_0) = m_1 - m_0, \Delta\xi(t_2 - t_1) = m_2 - m_1, \ldots, \Delta\xi(t_n - t_{n-1}) = m_n - m_{n-1}) = \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{m_j - m_{j-1}}}{(m_j - m_{j-1})!}\, e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}, \qquad 0 = m_0 \leqslant m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_m.
\end{aligned}$$

Так выглядит n-мерное распределение процесса Пуассона. Можно привести это выражение к более интересному виду: заметим, что

$$\sum_{j=1}^{n}(m_j - m_{j-1}) = m_n, \qquad \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = t_n, \qquad \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} = e^{-\lambda t_n}$$

и, если положить $p_j = \frac{\lambda(t_j - t_{j-1})}{\lambda t_n} = \frac{t_j - t_{j-1}}{t_n}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1, \qquad \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{m_j - m_{j-1}}}{(\lambda t_n)^{m_n}} = \prod_{j=1}^{n} p_j^{m_j - m_{j-1}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{m_j - m_{j-1}}}{k_j!}\, e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} = \\
&\qquad = \frac{(\lambda t_n)^{m_n}}{m_n!}\, e^{-\lambda t_n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(m_1 - m_0, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_{n-1}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_1^{k_n} \tag{2.5}$$

есть так называемая полиномиальная вероятность. Она является обобщением биномиальной вероятности $C_m^k p^k q^{m-k}$ на случай, когда в каждом из m независимых испытаний мы имеем не два возможных исхода (успех и неудачу), а исход одного из n типов. При этом $p_1, p_2, \ldots p_n$ задают распределение этих возможных исходов в единичном акте эксперимента ($p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$). Вероятность $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ есть вероятность того, что в m_n независимых испытаниях исход первого типа случится k_1 раз, исход второго типа случится k_2 раз и т. д., вплоть до того, что исход n-го типа случится k_n раз, при этом $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m_n$, т. е. в сумме мы имеем полное число испытаний.

При $n = 2$ вероятность $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ переходит в биномиальную, и мы имееем произведение пуассоновой и биномиальной вероятности:

$$P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2) = \frac{(\lambda t_2)^{m_2}}{m_2!}\, e^{-\lambda t_2} \cdot C_{m_2}^{m_1} p^{m_1} q^{m_2 - m_1}, \qquad p = \frac{t_1}{t_2},\; q = \frac{t_2 - t_1}{t_2}.$$

Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию процесса Пуассона. Напрямую из свойств распределения Пуассона получаем, что

$$M\xi(t) = \lambda t, \qquad D\xi(t) = \lambda t.$$

Можно сказать, что λ равно среднему числу элементарных событий в промежутке единичной длительности (при $t = 1$). Параметр λ называется *интенсивностью* процесса Пуассона.

Для расчёта ковариационной функции воспользуемся условием $P(\xi(0) = 0) = 1$ и запишем для $t > s$

$$\xi(s) = \xi(s) - \xi(0), \qquad \xi(t) = \xi(t) - \xi(s) + \xi(s) - \xi(0),$$

причём приращения $\alpha = \xi(s) - \xi(0)$ и $\beta = \xi(t) - \xi(s)$ независимы. В результате имеем

$$M\xi(t)\xi(s) = M\alpha(\alpha + \beta) = M\alpha^2 + M\alpha\beta = (D\alpha + M\alpha^2) + M\alpha \cdot M\beta$$

или, возвращаясь к исходным обозначениям и используя выписанные выше выражения для математического ожидания и дисперсии,

$$\begin{aligned} M\xi(t)\xi(s) &= \big(D\xi(s) + M^2\xi(s)\big) + M\xi(s) \cdot M(\xi(t) - \xi(s)) = \\ &= \lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s(\lambda t - \lambda s) = \lambda s + \lambda s \cdot \lambda t. \end{aligned}$$

Отсюда

$$R(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = \lambda s, \qquad t > s.$$

Значения ковариационной функции при $t < s$ получаются взаимной заменой $t \leftrightarrow s$:

$$R(t, s) = \lambda t, \qquad t < s.$$

Два последних выражения можно объединить в одно $R(t, s) = \lambda \min(t, s)$ – так выглядит ковариационная функция процесса Пуассона.

Замечание 2.1. Если (комплекснозначный) случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, имеет независимые приращения, т. е. для любых $0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $\xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы, и случайный процесс начинается в нуле, т. е. $P(\xi(0) = 0) = 1$, то

$$R(t, s) = D\xi(u)\big|_{u=\min(t,s)}. \tag{2.6}$$

В самом деле, если мы положим $\xi^\circ(t) = \xi(t) - M\xi(t)$ при всех $t \geqslant 0$, то случайный процесс $\xi^\circ(t)$ также будет иметь независимые приращения, при этом

$$M\xi^\circ(t) = M\overline{\xi^\circ(t)} = 0, \qquad D\xi^\circ(t) = M|\xi^\circ(t)|^2 = D\xi(t)$$

и $P(\xi^\circ(0) = 0) = 1$. При $0 < s < t$ мы имеем аналогично предыдущим рассуждениям

$$\begin{aligned} R(t, s) &= M(\xi(t) - M\xi(t))(\,\overline{\xi(s)} - M\overline{\xi(s)}\,) = M\xi^\circ(t)\overline{\xi^\circ(s)} = \\ &= M\big(\xi^\circ(t) - \xi^\circ(s) + \xi^\circ(s) - \xi^\circ(0)\big)\big(\,\overline{\xi^\circ(s)} - \overline{\xi^\circ(0)}\,\big) = \\ &= M(\xi^\circ(t) - \xi^\circ(s)) \cdot M(\,\overline{\xi^\circ(s)} - \overline{\xi^\circ(0)}\,) + M(\xi^\circ(s) - \xi^\circ(0))(\,\overline{\xi^\circ(s)} - \overline{\xi^\circ(0)}\,) = \\ &= 0 + M|\xi^\circ(s)|^2 = D\xi(s). \end{aligned}$$

При $t < s$ мы получаем $R(t, s) = D\xi(t)$. Оба случая объединяются в общую формулу (2.6), справедливую для любого случайного процесса с независимыми приращениями, начинающегося в нуле.

2.2. Пуассонов поток требований. Рассмотрим физические явления, математической моделью которых может служить процесс Пуассона. Предположим, что в любой момент времени $t > 0$ может случайным образом произойти или не произойти некоторое событие, которое само имеет нулевую длительность. Будем называть эти события требованиями, чтобы отличать от других, более сложных, случайных событий, возникающих в нашем рассмотрении. Пусть $\xi(t)$ – число требований, поступивших к моменту времени t, т. е. в промежуток времени $[0, t)$, тогда $\xi(t+h) - \xi(t)$ равно числу требований, поступивших в промежуток $[t, t+h)$. Очевидно, $\xi(t+h) - \xi(t)$ есть случайная величина, принимающая значения $0, 1, 2, \ldots$.

Будем говорить, что $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, есть *пуассонов поток требований*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- для любых $t, h > 0$ распределение числа требований $\xi(t+h) - \xi(t) = \Delta\xi(h)$ на интервале $[t, t+h)$ зависит только от h и не зависит от t (однородность потока);
- для любого $n = 2, 3, \ldots$ и любых $t_0, t_1, \ldots, t_n$ таких, что $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, случайные величины $\Delta\xi(t_k - t_{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots, n$, независимы (независимость приращений);
- при $h \to +0$ распределение случайной величины $\Delta\xi(h) = \xi(t+h) - \xi(t)$ задаётся как

$$P(\Delta\xi(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \tag{2.7}$$

$$P(\Delta\xi(h) = 1) = \lambda h + o(h), \tag{2.8}$$

$$P(\Delta\xi(h) > 1) = o(h), \tag{2.9}$$

  где λ – постоянная величина, $0 < \lambda < \infty$.

Видно, что два первых условия в точности повторяют условия однородности и независимости приращений для процесса Пуассона.

Обсудим последнее условие. Положим

$$p_0(h) \stackrel{\text{def}}{=\!=} P(\Delta\xi(h) = 0), \qquad h > 0.$$

Доопределим эту вероятность в нуле как $p_0(0) = 1$, поскольку в промежуток $[t, t)$ нулевой длины не может поступить ни одного требования. Предположим, что $p_0(h)$ при $h \to +0$ ведёт себя непрерывным образом: $p_0(h) \to 1 - 0$ (вероятность стремится к $p(0) = 1$, разумеется, снизу). Теперь нас будут интересовать поправки к предельному значению при малых $h > 0$. Будем считать, что возможно разложение в ряд Тейлора до членов первого порядка:

$$p_0(h) = p_0(0) + \left.\frac{dp_0(h)}{dh}\right|_{h=0} \cdot h + o(h), \qquad h \to +0.$$

Тогда условия (2.7)–(2.9) означают, что вся поправка первого порядка «исчерпывается» событием $\Delta\xi(h) = 1$, а события $\Delta\xi(h) > 1$ чрезвычайно редки (имеют вероятность порядка $o(h)$). Таким образом, можно сказать, что условия (2.7)–(2.9) гарантируют малую интенсивность (редкость) событий в потоке.

Теорема 2.1. *Пусть поток элементарных случайных событий является пуассоновым, т. е. удовлетворяет условиям независимости приращений, однородности* *во времени и условиям (2.7)–(2.9). Тогда случайная величина $\xi(t)$ при каждом $t > 0$ имеет распределение Пуассона с параметром λt:*

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть значение $t > 0$ и число $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ фиксированы. Выберем произвольное и пока также фиксированное натуральное число $n > 1$. Разобьем промежуток $[0, t)$ точками $t_0, t_1, \ldots, t_n$ на n интервалов одинаковой длины:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, \qquad h = t_j - t_{j-1} = \frac{t}{n} \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть β_j – случайная величина, равная количеству требований, поступивших в промежуток $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. В силу условий независимости приращений и однородности потока все случайные величины $\beta_1, \ldots, \beta_n$ независимы и одинаково распределены. В каждый из промежутков $[t_{j-1}, t_j)$ может произойти сколь угодно много событий, другими словами, любая из случайных величин β_j может принимать значения $0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, общее количество требований в интервале $[0, t)$ есть сумма требований, поступивших в каждом из маленьких интервалов:

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j.$$

Рассмотрим следующее событие: если все β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, не превосходят единицы, то будем говорить, что случилось событие $\mathbf{I}_n$. Его дополнение (хотя бы одна из случайных величин β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, приняла значение, большее единицы) обозначим через $\mathbf{II}_n$. Можно записать математические выражения для введённых событий:

$$\mathbf{I}_n = \bigcap_{j=1}^{n} \{\beta_j = 0, 1\}, \qquad \mathbf{II}_n = \bigcup_{j=1}^{n} \{\beta_j > 1\}.$$

Запишем формулу полной вероятности

$$P(\xi(t) = m) = P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{I}_n) P(\mathbf{I}_n) + P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{II}_n) P(\mathbf{II}_n)$$

и найдём входящие в неё вероятности. Имеем для $\beta_j = \Delta\xi(h)$ в силу (2.9)

$$P(\mathbf{II}_n) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} \{\beta_j > 1\} \right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} P(\beta_j > 1) = n \cdot o(h) = n \cdot o(t/n).$$

Далее, если реализовалось событие $\mathbf{I}_n$, то в каждом из интервалов $[t_{j-1}, t_j)$ либо поступит (ровно) одно требование ($\beta_j = 1$), либо ни одного требования не поступит ($\beta_j = 0$), $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом, как мы уже отмечали, случайные величины $\beta_1, \ldots, \beta_n$ независимы и одинаково распределены. Другими словами, имеем схему n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха

$$p_n = P(\beta_j = 1) = \lambda h + o(h) = \lambda t/n + o(t/n) \tag{2.11}$$

(см. условие (2.8)). Итак,

$$P(\xi(t)=m \mid \mathbf{I}_n)=C_n^m p_n^m(1-p_n)^{n-m}, \qquad m=0,1,\ldots,n. \tag{2.12}$$

Теперь посмотрим, к чему стремится каждая вероятность при $n\to\infty$:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{II}_n)&=n\cdot o(t/n)\to 0, \qquad & P(\xi(t)=m\mid \mathbf{II}_n)P(\mathbf{II}_n)&\leqslant P(\mathbf{II}_n)\to 0,\\ P(\mathbf{I}_n)&=1-P(\mathbf{II}_n)\to 1, \qquad & P(\xi(t)=m\mid \mathbf{II}_n)&\to \frac{(\lambda t)^m}{m!}\,e^{-\lambda t}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где в последнем предельном переходе мы применили теорему Пуассона: в формулах (2.12) и (2.11)

$$C_n^m p_n^m(1-p_n)^{n-m}\to \frac{(\lambda t)^m}{m!}\,e^{-\lambda t} \qquad \text{при} \qquad n\to\infty, \quad np_n=\lambda t+n\cdot o(t/n)\to\lambda t.$$

Таким образом,

$$P(\xi(t)=m)=P(\xi(t)=m\mid \mathbf{I}_n)P(\mathbf{I}_n)+P(\xi(t)=m\mid \mathbf{II}_n)P(\mathbf{II}_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\,e^{-\lambda t}\cdot 1+0.$$

Поскольку выражение в левой части равенства не зависит от n, мы обязаны записать

$$P(\xi(t)=m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\,e^{-\lambda t}, \qquad m=0,1,\ldots\,.$$

Теорема доказана.

Если вспомнить, что в потоке событий $P(\xi(0)=0)=1$, и учесть условие однородности потока, то мы получим, что случайная величина $\xi(t)-\xi(s)$ при $0<s<t$ распределена так же, как случайная величина $\xi(t-s)-\xi(0)=\xi(t-s)$, поэтому

$$P(\xi(t)-\xi(s)=m)=\frac{(\lambda(t-s))^m}{m!}\,e^{-\lambda(t-s)}, \qquad m=0,1,\ldots,$$

что совпадает с (2.1). Таким образом, любой пуассонов поток событий является процессом Пуассона. В дальнейшем мы будем пользоваться обеими интерпретациями процесса Пуассона: и его математическим определением, и его физическим представлением как потока требований.

Траектории $\xi_\omega(t)$, $t\geqslant 0$, процесса Пуассона представляют собой кусочно-постоянные функции, выходящие из нуля, $\xi_\omega(0)=0$, в случайные моменты времени $\tau_1,\tau_2,\ldots$ испытывающие скачок, равный $+1$:

$$\xi_\omega(\tau_k-0)=k-1, \qquad \xi_\omega(\tau_k)=k, \qquad k=1,2,\ldots\,.$$

Момент времени $t=\tau_k$ – это время поступления k-го требования. Очевидно, что с вероятностью единица

$$0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\cdots.$$

Распределения времён поступления требований. Найдём связь между распределениями времени τ_k и распределением процесса Пуассона. Если $\tau_k \geqslant t$, то k-е требование поступило самое раннее в момент времени t, следовательно, на промежутке $[0, t)$ мы имеем строго меньше, чем k требований, $\xi(t) < k$. Таким образом, $\tau_k \geqslant t$ влечёт $\xi(t) < k$. Наоборот, если $\xi(t) < k$, то на промежутке $[0, t)$ мы имеем строго меньше чем k требований, следовательно, k-е требование поступило в момент времени t или когда-то позже, иначе говоря, $\xi(t) < k$ влечёт $\tau_k \geqslant t$. Итак,

$$\tau_k \geqslant t \quad \Longleftrightarrow \quad \xi(t) < k, \qquad \tau_k < t \quad \Longleftrightarrow \quad \xi(t) \geqslant k. \tag{2.14}$$

Отсюда

$$t_1 \leqslant \tau_k < t_2 = \{\tau_k \geqslant t_1\} \cap \{\tau_k < t_2\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\xi(t_1) < k\} \cap \{\xi(t_2) \geqslant k\}. \tag{2.15}$$

Пример 2.4. Найти распределение случайной величины τ_k.

Решение. С учётом эквивалентности событий (2.14) имеем

$$P(\tau_k \geqslant t) = P(\xi(t) < k) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}.$$

Функция распределения случайной величины τ_k записывается как

$$F_k(t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} P(\tau_k < t) = 1 - P(\tau_k \geqslant t) = 1 - P(\xi(t) < k) = P(\xi(t) \geqslant k),$$

или, в явном виде,

$$F_k(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad t > 0. \tag{2.16}$$

При этом $F_k(0) = P(\tau_k < 0) = 0$.

Найдём более компактное выражение для плотности распределения случайной величины τ_k, воспользовавшись первым равенством в (2.16): по определению имеем

$$p_k(t) = \frac{dF_k(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}.$$

Выделим отдельно первое слагаемое, не содержащее степенной функции, получим

$$p_k(t) = -\frac{de^{-\lambda t}}{dt} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} \right) =$$
$$= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} - \sum_{m=1}^{k-1} \lambda \frac{m(\lambda t)^{m-1}}{m!}\, e^{-\lambda t}.$$

Объединяем обратно первый и второй член в правой части,

$$\lambda e^{-\lambda t} + \lambda \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} = \lambda \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \tag{2.17}$$

а в третьем члене делаем тривиальные преобразования и сдвигаем индекс суммирования как $m \mapsto m-1$,

$$\sum_{m=1}^{k-1} \lambda \frac{m(\lambda t)^{m-1}}{m!}\, e^{-\lambda t} = \lambda \sum_{m=0}^{k-2} \lambda \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}. \tag{2.18}$$

Видим что правые части равенств (2.17) и (2.18) различаются только одним слагаемым (при $m = k-1$ в (2.17)), таким образом,

$$p_k(t) = \lambda \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} - \lambda \sum_{m'=0}^{k-2} \lambda \frac{(\lambda t)^{m'}}{m'!}\, e^{-\lambda t} = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda t}. \tag{2.19}$$

В частности, $p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$, и время ожидания первого из элементарных событий имеет экспоненциальное распределение.

Пример 2.5. Найти совместное распределение случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Решение. Вновь рассмотрим сначала случай $n = 2$. Пусть $t_1, t_2 > 0$. Найдём $P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1+\Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2+\Delta t_2)$ в первом порядке по Δt_1, Δt_2 и воспользуемся дифференциальным равенством, задающим плотность распределения:

$$p_{\tau_1,\tau_2}(t_1, t_2) = \lim_{\Delta t_1, \Delta t_2 \to 0} \frac{P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2}.$$

Поскольку $\tau_1 < \tau_2$ с вероятностью единица, $p_{\tau_1,\tau_2}(t_1, t_2) = 0$ при $t_1 > t_2$. Поэтому положим $t_1 < t_2$ и выберем Δt_1 настолько малым, чтобы было выполнено неравенство $t_1 + \Delta t_1 < t_2$.

Теперь перепишем искомую вероятность в терминах процесса Пуассона. Воспользуемся эквивалентностью событий (2.15) при $k = 1, 2$ и запишем несколько равносильных условий:

$$\begin{gathered}
t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1, \qquad t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2 \\
\Updownarrow \\
\xi(t_1) < 1, \quad \xi(t_1 + \Delta t_1) \geqslant 1, \qquad \xi(t_2) < 2, \quad \xi(t_2 + \Delta t_2) \geqslant 2 \\
\Updownarrow \\
\xi(t_1) = 0, \quad \xi(t_1 + \Delta t_1) = 1, \qquad \xi(t_2) = 1, \quad \xi(t_2 + \Delta t_2) \geqslant 2 \\
\Updownarrow \\
\xi(t_1) - \xi(0) = 0, \quad \xi(t_1 + \Delta t_1) - \xi(t_1) = 1, \\
\xi(t_2) - \xi(t_1 + \Delta t_1) = 0, \quad \xi(t_2 + \Delta t_2) - \xi(t_2) \geqslant 1,
\end{gathered} \tag{2.20}$$

где мы учли, что $t_1 + \Delta t_1 < t_2$ и что траектории процесса Пуассона не убывают. Кроме того, в силу $0 < t_1 < t_1 + \Delta t_1 < t_2 < t_2 + \Delta t_2$ все приращения в последнем блоке в (2.20) независимы ($\xi(0) = 0$ с вероятностью единица). В результате имеем

$$\begin{aligned}
&P(t_1 \leqslant \tau_1 < t_1 + \Delta t_1,\, t_2 \leqslant \tau_2 < t_2 + \Delta t_2) = \\
&\quad = P(\xi(t_1) = 0) \cdot P(\Delta\xi(\Delta t_1) = 1) \cdot P(\Delta\xi(t_2 - t_1 - \Delta t_1) = 0) \cdot P(\Delta\xi(\Delta t_2) \geqslant 1).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Первые три вероятности очевидны,

$$P(\xi(t_1)=0)=e^{-\lambda t_1}, \qquad P(\Delta\xi(\Delta t_1)=1)=\lambda\Delta t_1\, e^{-\lambda\Delta t_1},$$
$$P(\Delta\xi(t_2-t_1-\Delta t_1)=0)=e^{-\lambda(t_2-t_1-\Delta t_1)}=e^{-\lambda(t_2-t_1)}e^{-\lambda\Delta t_1},$$

а последнюю вероятность запишем как

$$P(\Delta\xi(\Delta t_2)\geqslant 1)=1-P(\Delta\xi(\Delta t_2)=0)=1-e^{-\lambda\Delta t_2}=\lambda\Delta t_2+o(\Delta t_2).$$

Записываем (2.21) в первом порядке малости по Δt_1, Δt_2. Мы уже имеем в явном виде Δt_1, Δt_2 во втором и четвёртом сомножителях в правой части (2.21), поэтому в показателях экспонент кладём $\Delta t_k=0$, суммируем показатели экспонент и получаем окончательный ответ

$$P(t_1\leqslant\tau_1<t_1+\Delta t_1,\, t_2\leqslant\tau_2<t_2+\Delta t_2)=\lambda^2\, e^{-\lambda t_2}\cdot\Delta t_1\Delta t_2,$$

откуда (не забываем про ограничение $0<t_1<t_2$!)

$$p_{\tau_1,\tau_2}(t_1,t_2)=\begin{cases}\lambda^2\, e^{-\lambda t_2} & \text{при } 0<t_1<t_2,\\ \quad 0 & \text{при прочих } t_1,t_2.\end{cases} \tag{2.22}$$

Нетрудно получить обобщение на случай произвольного n. Если $0<t_1<\dots<t_n$ и $\Delta t_1,\dots,\Delta t_{n-1}$ настолько малы, что $t_1+\Delta t_1<t_2,\dots,t_{n-1}+\Delta t_{n-1}<t_n$, то мы имеем аналогично (2.21)

$$\begin{aligned}P(t_1\leqslant\tau_1<t_1+\Delta t_1,\, t_2\leqslant\tau_2<t_2+\Delta t_2,\dots,\, t_n\leqslant\tau_n<t_n+\Delta t_n)=\\ =P(\xi(t_1)=0)\cdot P(\Delta\xi(\Delta t_1)=1)\cdot P(\Delta\xi(t_2-t_1-\Delta t_1)=0)\times\\ \times P(\Delta\xi(\Delta t_2)=1)\cdot P(\Delta\xi(t_3-t_2-\Delta t_2)=0)\times\cdots\\ \cdots\times P(\Delta\xi(\Delta t_{n-1})=1)\cdot P(\Delta\xi(t_n-t_{n-1}-\Delta t_{n-1})=0)\cdot P(\Delta\xi(\Delta t_n)\geqslant 1).\end{aligned}$$

Как и выше, первый порядок малости по Δt_n дают $P(\Delta\xi(\Delta t_k)=1)$, поэтому $P(\Delta\xi(t_n-t_{n-1}-\Delta t_{n-1})=0)$ мы заменяем на $e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}$, собираем показатели экспонент и получаем ответ:

$$p_{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_2}(t_1,t_2,\dots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n\, e^{-\lambda t_n} & \text{при } t_1<t_2<\dots<t_n,\\ \quad 0 & \text{при прочих } t_1,t_2,\dots,t_n.\end{cases} \tag{2.23}$$

Хотя создаётся впечатление, что плотность распределения (2.23) зависит только от «старшего» времени t_n, на самом деле это не так: зависимость от остальных времён содержится в условии $t_1<t_2<\dots<t_n$, ограничивающих область ненулевых значений плотности.

Пример 2.6. Показать, что промежутки времени $\Delta\tau_k=\tau_k-\tau_{k-1}$ (считаем, что $\tau_0=0$ с вероятностью единица и, следовательно, $\Delta\tau_1=\tau_1$) между последовательными моментами поступления требований в пуассоновом потоке независимы при всех $k=1,2,\dots,n$ для любого $n>1$ и каждая из случайных величин $\Delta\tau_k$ имеет экспоненциальное распределение, т. е. её плотность распределения имеет вид $\lambda e^{-\lambda t}$ при $t>0$.

Решение. Вновь начнём с $n = 2$. Пусть $u_1, u_2 > 0$. Имеем в силу стандартных формул теории вероятностей и выражения (2.22) для двумерной плотности распределения

$$
\begin{aligned}
F_{\Delta\tau_1,\Delta\tau_2}(u_1,u_2) &= P(\tau_1 < u_1,\, \tau_2 - \tau_1 < u_2) = \\
&= \iint\limits_{t_1<u_1,\ t_2-t_1<u_2} p_{\tau_1,\tau_2}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 = \iint\limits_{\substack{0<t_1<t_2,\\ t_1<u_1,\\ t_2-t_1<u_2}} \lambda^2 e^{-\lambda t_2}\,dt_1\,dt_2 = \\
&= \int_0^{u_1} \lambda\,dt_1 \int_{t_1}^{t_1+u_2} \lambda\, e^{-\lambda t_2}\,dt_2 = (1-e^{-\lambda u_2})(1-e^{-\lambda u_1}).
\end{aligned}
$$

Видно, что $F_{\Delta\tau_1,\Delta\tau_2}(u_1,u_2) = F_{\Delta\tau_1}(u_1)F_{\Delta\tau_2}(u_2)$, где $F_{\Delta\tau_k}(u_k) = (1-e^{-\lambda u_k})$, $k = 1,2$, при $u_1, u_2 > 0$.

Отсюда вытекает независимость случайных величин $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$, а также, что каждая из них имеет плотность $p_{\Delta\tau_k}(u_k) = e^{-\lambda u_k}$ при $u_k > 0$, $k = 1,2$.

При произвольном натуральном $n > 2$ имеем

$$
\begin{aligned}
&F_{\Delta\tau_1,\Delta\tau_2,\ldots,\Delta\tau_2}(u_1,u_2,\ldots,u_n) = P(\tau_1 < u_1,\, \tau_2-\tau_1 < u_2, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1} < u_n) = \\
&= \iint\limits_{\substack{t_1<u_1,\, t_2-t_1<u_2,\\ \ldots,\\ t_n-t_{n-1}<u_n}} \cdots \int p_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n}(t_1,t_2,\ldots t_n)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n = \\
&= \iint\limits_{\substack{0<t_1<t_2<\cdots<t_n,\\ t_1<u_1,\, t_2-t_1<u_2,\\ \ldots,\\ t_n-t_{n-1}<u_n}} \lambda^n e^{-\lambda t_n}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n = \\
&= \int_0^{u_1}\lambda\,dt_1 \int_{t_1}^{t_1+u_2} \lambda\,dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+u_n} \lambda\, e^{-\lambda t_n}\,dt_n.
\end{aligned}
$$

Многократный интеграл вычислить несложно: последний (внутренний) интеграл равен

$$
\int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+u_n} \lambda\, e^{-\lambda t_n}\,dt_n = e^{-\lambda t_{n-1}} - e^{-\lambda(t_{n-1}+u_n)} = (1-e^{-\lambda u_n})e^{-\lambda t_{n-1}}.
$$

Видно, что не зависящий от всех t_k множитель $1 - e^{-\lambda u_n}$ выносится, а множитель $e^{-\lambda t_{n-1}}$ переходит в следующий интеграл:

$$
\int_{t_{n-2}}^{t_{n-2}+u_{n-1}} \lambda\, e^{-\lambda t_{n-1}}\,dt_{n-1} = e^{-\lambda t_{n-2}} - e^{-\lambda(t_{n-2}+u_{n-1})} = (1-e^{-\lambda u_{n-1}})e^{-\lambda t_{n-2}}.
$$

Таким образом, последовательное взятие интегралов по $t_n, t_{n-1}, \ldots t_2$ в конечном итоге даёт при всех $u_k > 0$

$$
\begin{aligned}
&F_{\Delta\tau_1,\Delta\tau_2,\ldots,\Delta\tau_2}(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \\
&\quad = (1-e^{-\lambda u_n})(1-e^{-\lambda u_{n-1}})\ldots(1-e^{-\lambda u_2}) \int_0^{u_1} \lambda\, e^{-\lambda t_1}\,dt_1 = \prod_{k=1}^{n}(1-e^{-\lambda u_k}).
\end{aligned}
$$

Отсюда вытекает независимость случайных величин $\Delta\tau_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а также, что каждая из них имеет плотность $p_{\Delta\tau_k}(u_k) = e^{-\lambda u_k}$ при $u_k > 0$.

Замечание 2.2. Пусть случайная величина τ имеет экспоненциальное распределение, $p_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Найдём условную вероятность $P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t)$. Имеем при $t, s > 0$

$$P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t) = \frac{P(t \leqslant \tau < t + s,\, \tau \geqslant t)}{P(\tau \geqslant t)} = \frac{P(t \leqslant \tau < t + s)}{P(\tau \geqslant t)}.$$

Находим вероятности

$$P(t \leqslant \tau < t + s) = \int_t^{t+s} \lambda e^{-\lambda u}\, du = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)},$$
$$P(\tau \geqslant t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\, du = e^{-\lambda t}.$$

Отсюда условная вероятность

$$P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s}$$

не зависит от t и совпадает с $P(0 \leqslant \tau < s)$. Другими словами, экспоненциальное распределение не имеет «памяти»: если требование не поступило к моменту времени t, то условная вероятность того, что оно поступит в следующие s единиц времени не зависит от t, т. е. от того, как долго мы ждали поступления этого требования раньше.

Пример 2.7. Пусть случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ независимы и имеют одинаковые математическое ожидание и дисперсию, $M\alpha_j = a$, $D\alpha_j = d^2$. Положим $P(\alpha_0 = 0) = 1$. Определим $N(t)$, $t \geqslant 0$, как процесс Пуассона с интенсивностью λ, причём любое сечение этого процесса и случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ будем также считать независимыми. Случайный процесс $\xi(t)$ задан формулой

$$\xi(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} \alpha_j, \qquad t \geqslant 0.$$

Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$.

Решение. Возьмём полную группу событий $N(t) = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и разложим одномерную функцию распределения процесса $\xi(t)$ по этой полной группе:

$$F_\xi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi(t) < x \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\xi(x, t \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n),$$

где через $F_\xi(\,\cdot \,|\, N(t) = n)$ мы обозначили условную (при условии $N(t) = n$) одномерную функцию распределения случайного процесса. Тогда математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$ также разложится в сумму условных математических ожиданий (здесь мы не приводим строгого математического обоснования законности перестановки интеграла и суммы):

$$M\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x,t\,|\,N(t)=n)P(N(t)=n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} M(\xi(t)\,|\,N(t)=n)P(N(t)=n).$$

Далее, по условию

$$P(N(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t}$$

и, самое главное,

$$M(\xi(t)\,|\,N(t)=n) = M\left(\sum_{j=0}^{N(t)} \alpha_j \,\middle|\, N(t)=n\right) = M\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \,\middle|\, N(t)=n\right) =$$
$$= M\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} M\alpha_j = an, \tag{2.24}$$

где при переходе от условного математического ожидания к безусловному (при переходе на вторую строку формулы) мы воспользовались независимостью случайных величин $N(t)$ и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$. Также мы учли, что $M\alpha_j = a$ при $j > 0$ и $M\alpha_0 = 0$. Таким образом,

$$M\xi(t) = a\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t} = a\lambda t. \tag{2.25}$$

Здесь при вычислении суммы мы использовали тот факт, что она определяет математическое ожидание случайной величины, распределённой по Пуассону с параметром λt.

Для расчёта ковариационной функции мы воспользуемся аналогичным приёмом, но теперь полная группа событий будет связана с возможными значениями двух различных сечений случайного процесса. Кроме того, следует учесть, что приращение $N(t+s)-N(s)$ при $t, s > 0$ распределено по Пуассону и принимает неотрицательные целые значения, следовательно, $N(t+s) \geqslant N(t)$ с вероятностью единица. В соответствии с этим выберем полную группу событий как

$$N(s)=m, \quad m=0,1,2,\ldots, \qquad N(t+s)=n+m, \quad n=0,1,2,\ldots\ .$$

При этом в силу независимости приращений процесса $N(t)$, $t \geqslant 0$,

$$P(N(s)=m,\, N(t+s)=n+m) = P(N(s)-N(0)=m,\, N(t+s)-N(s)=n) =$$
$$= P(N(s)-N(0)=m)\cdot P(N(t+s)-N(s)=n) =$$
$$= \frac{(\lambda s)^m}{m!}\,e^{-\lambda s}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t} = P_s(m)P_t(n),$$

в правой части для краткости мы ввели обозначения для пуассоновых вероятностей

$$P_s(m) = P(N(s)=m) = \frac{(\lambda s)^m}{m!}\,e^{-\lambda s},$$

$$P_t(n) = P(N(t)=n) = P(N(t+s)-N(s)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}.$$

Итак, имеем по аналогии с (2.24)

$$\begin{aligned} M\xi(s)\xi(t+s) &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\sum_{j=0}^{N(s)}\alpha_j \sum_{k=0}^{N(t+s)}\alpha_k \,\middle|\, N(s)=m,\, N(t+s)=n+m\right)\times \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \times P(N(s)=m,\, N(t+s)=n+m) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M\sum_{j=0}^{m}\alpha_j \sum_{k=0}^{n+m}\alpha_k\cdot P_s(m)P_t(n) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_s(m)P_t(n)\cdot\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k. \end{aligned}$$

Теперь найдём $M\alpha_j\alpha_k$. Очевидно,

$$M\alpha_j\alpha_k = \begin{cases} M\alpha_j\cdot M\alpha_k, & j\neq k, \\ M\alpha_k^2, & j=k, \end{cases}$$

и (поскольку неслучайная величина $\alpha_0 = 0$ независима с остальными α_k)

$$M\alpha_j\cdot M\alpha_k = \begin{cases} a^2, & k\neq j, \quad k,j>0, \\ 0, & k\neq j, \quad k\cdot j = 0, \end{cases} \qquad M\alpha_k^2 = \begin{cases} a^2+d^2, & k>0, \\ 0, & k=0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+m}(a^2+\delta_{jk}d^2) = \\ = a^2\cdot m(m+n) + d^2\cdot m = a^2m^2 + a^2mn + d^2m. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Теперь подставляем полученные выражения в разложение по полной группе событий. Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} mP_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP_s(m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_t(n) = \lambda s,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} m^2P_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2P_s(m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P_t(n) = \lambda s + (\lambda s)^2,$$

где, суммируя по m, мы нашли математические ожидания случайных величин $N(s)$ и $N^2(s)$, а суммируя по n, учли условие нормировки распределения случайной величины $N(t+s)-N(t)$. Наконец,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} mnP_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP_s(m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} nP_t(n) = \lambda s\cdot\lambda t.$$

Собираем все полученные результаты (см. правую часть равенства (2.26)):

$$M\xi(s)\xi(t+s) = a^2\big(\lambda s + (\lambda s)^2\big) + a^2\lambda s\cdot\lambda t + d^2\lambda s.$$

Отсюда, принимая во внимание уже найденное математическое ожидание (2.25), получаем

$$\begin{aligned} R(s,t+s) &= M\xi(s)\xi(t+s) - M\xi(s)\cdot M\xi(t+s) = \\ &= a^2\big(\lambda s + (\lambda s)^2\big) + a^2\lambda s\cdot\lambda t + d^2\lambda s - a\lambda s\cdot a\lambda(t+s). \end{aligned}$$

Приведём подобные слагаемые: $R(s,t+s) = \lambda s(a^2+d^2)$. Видно, что значение ковариационной функции определяется значением меньшего из её аргументов, как это бывает у процессов с независимыми приращениями.

В заключение рассмотрим процесс, в некотором роде обратный к процессу Пуассона. Пусть в составе некоторой системы имеется устройство, которое работает в течение случайного времени τ, после чего отказывает. Непосредственно после отказа устройство мгновенно заменяют на аналогичное. Таким образом, время работы системы до n-го отказа есть случайная величина

$$S_n = \tau_1 + \dots + \tau_n, \tag{2.27}$$

где τ_k – время работы k-го устройства. Мы будем считать, что случайные величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ независимы при любом n и одинаково распределены. Определим случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, формулой

$$\xi(t) = \max\{n \mid \tau_1 + \dots + \tau_n < t\}, \qquad t > 0, \tag{2.28}$$

таким образом, $\xi(t)$ – количество отказов, случившихся вплоть до момента времени t (на промежутке $[0,t)$). Процесс $\xi(t)$ называется *процессом восстановления.*

Пример 2.8. Пусть в случайном процессе (2.28) случайные величины имеют экспоненциальное распределение с плотностью $\lambda e^{-\lambda x}$ при $x > 0$. Найти одномерное распределение процесса (2.28).

Решение. Индукцией по n покажем, что в нашем случае плотность распределения $p_n(\,\cdot\,)$ случайной величины S_n (2.27) имеет вид

$$p_n(x) = \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \qquad \text{при всех} \quad n = 1, 2, \dots\,. \tag{2.29}$$

Пусть $x > 0$. При $n = 1$ мы имеем $S_1 = \tau_1$, следовательно, по условию задачи $p_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, и начальное индукционное утверждение выполнено.

Пусть для некоторого n плотность распределения случайной величины S_n имеет вид (2.29). Тогда $S_{n+1} = S_n + \tau_{n+1}$, причём (опять же по условию задачи) случайные величины $S_n = \tau_1 + \dots + \tau_n$ и τ_{n+1} независимы. Тогда функцию распределения случайной величины S_{n+1} можно найти стандартным образом: для $x > 0$

$$F_{n+1}(x) = P(S_n + \tau_{n+1} < x) = \iint\limits_{z+y<x} p_{S_n}(z)p_{\tau_{n+1}}(u)\,dz\,du =$$

$$= \iint\limits_{\substack{z+y<x\\ z,y>0}} \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda z} \cdot e^{-\lambda u}\, dz\, du = \int_0^x \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda z}\, dz \int_0^{x-z} \lambda e^{-\lambda u}\, du.$$

Возьмём только внутренний интеграл,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_0^x \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda z}(1 - e^{-\lambda(x-z)})\, dz = \\ &= \int_0^x \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda z}\, dz - e^{-\lambda x} \int_0^x \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, dz, \end{aligned}$$

и найдём плотность распределения, дифференцируя под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx} F_{n+1}(x) = \\ &= \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda x} - \left(-\lambda e^{-\lambda x} \int_0^x \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, dz + e^{-\lambda x} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \int_0^x \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, dz = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \left. \frac{(\lambda z)^n}{n!} \right|_0^x = \lambda \frac{(\lambda x)^n}{n!}\, e^{-\lambda x}, \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что $p_{n+1}(\,\cdot\,)$ имеет вид (2.29). Формула (2.29) доказана.

Вернёмся к нашей задаче и найдём распределение произвольного сечения случайного процесса $\xi(t)$. По аналогии с формулами, приведёнными выше, запишем

$$\begin{aligned} P(\xi(t) = n) &= P(S_n \leqslant t,\, S_{n+1} > t) = P(S_n \leqslant t,\, S_n + \tau_{n+1} > t) = \\ &= \iint\limits_{z \leqslant t,\, z+y>t} p_n(z) p_{\tau_{n+1}}(u)\, dz\, du = \\ &= \iint\limits_{\substack{z \leqslant t,\, z+u>t\\ z,u>0}} \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda z} \cdot \lambda e^{-\lambda u}\, dz\, du = \int_0^t \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda z}\, dz \int_{t-z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\, du = \\ &= \int_0^t \lambda \frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda z} \cdot e^{-\lambda(t-z)}\, dz = \left. \frac{(\lambda z)^n}{n!} \right|_0^t \cdot e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\xi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt.

3. ПРОЦЕСС ВИНЕРА

Этот раздел посвящён одному из самых важных в теории случайному процессу – процессу Винера. Его математическое исследование достаточно сложное, поэтому некоторые утверждения, сформулированные ниже, мы оставим без аккуратного математического обоснования. Заметим, однако, что большинство этих утверждений достаточно очевидны с точки зрения «здравого смысла».

3.1. Определение и основные характеристики процесса Винера.

Определение 3.1. Случайный процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$, называется *процессом Винера*, если:

1) его приращения независимы, т. е. для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $w(t_k) - w(t_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, независимы в совокупности;

2) процесс однороден во времени, т. е. распределение приращения $w(s+t) - w(s)$ для $t, s > 0$ зависит только от t и не зависит от s;

3) распределение приращения $w(s+t) - w(s)$ является нормальным с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$ (здесь σ^2 – положительная постоянная), т. е. плотность распределения случайной величины $\Delta w(t) = w(s+t) - w(s)$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0;$$

4) процесс начинается в нуле: $P(w(0) = 0) = 1$.

Непосредственно из определения вытекает, что сечение $w(t) = w(t) - w(0)$ процесса Винера распределено нормально, одномерная плотность распределения есть

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Математическое ожидание $Mw(t) = 0$, дисперсия $Dw(t) = \sigma^2 t$, а ковариационная функция $R_w(t,s) = \sigma^2 \min(t,s)$, как это следует из общей формулы для однородных процессов с независимыми приращениями.

Найдём n-мерную плотность распределения. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Выразим сечения $w(t_k)$ через приращения $\Delta w_k = w(t_k) - w(t_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
&w(t_1) = w(t_1) - w(0) = \Delta w_1,\\
&w(t_2) = w(t_2) - w(t_1) + w(t_1) - w(t_0) = \Delta w_1 + \Delta w_2,\\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&w(t_n) = w(t_n) - w(t_{n-1}) + \dots + w(t_1) - w(0) = \Delta w_1 + \dots + \Delta w_n.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда n-мерную функцию распределения можно найти по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
F(x_1, t_1; x_2, t_2 \dots, x_n, t_n) &\overset{\text{def}}{=\!=} P(w(t_1) < x_1, \dots, w(t_n) < x_n) =\\
&= P(\Delta w_1 < x_1, \dots, \Delta w_1 + \dots + \Delta w_n < x_n) =\\
&= \underset{\substack{z_1 < x_1,\\ \dots\dots\dots,\\ z_1 + \dots + z_n < x_n}}{\int \dots \int} p_1(z_1) \dots p_n(z_n)\, dx_1 \dots dx_n,
\end{aligned}$$

где мы учли, что случайные величины $\Delta w_1, \ldots, \Delta w_n$ независимы, и ввели для краткости обозначение $p_k(\,\cdot\,)$ для плотности распределения приращения Δw_k,

$$p_k(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k - t_{k-1})}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2(t_k - t_{k-1})}}, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Совершим в n-кратном интеграле линейную замену переменных, которая упрощает вид области интегрирования:

$$\begin{aligned} &y_1 = z_1, \quad y_2 = z_1 + z_2, \quad \ldots, \quad y_n = z_1 + \cdots + z_1, \\ &z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2 - y_1, \quad \ldots, \quad z_n = y_n - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Якобиан перехода при такой замене переменных равен единице. Введём для однообразия формул $y_0 = 0$, тогда $z_k = \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ для всех $k = 1, \ldots, n$ (наша замена в точности повторяет переход от приращений к сечениям, заданный в (3.1)). В результате получим

$$\underset{\substack{z_1 < x_1,\\ \cdots\cdots\cdots,\\ z_1 + \cdots + z_n < x_n}}{\int \cdots \int} p_1(z_1) \ldots p_n(z_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \underset{y_1 < x_1, \ldots, y_n < x_n}{\int \cdots \int} p_1(\Delta y_1) \ldots p_n(\Delta y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Возвращаясь к исходному равенству, имеем

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2 \ldots, x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_1(\Delta y_1) \ldots p_n(\Delta y_n)\, dy_1 \ldots dy_n,$$

таким образом, получаем n-мерную плотность (мы, как обычно положили $x_0 = 0$)

$$p(x_1, t_1; \,\ldots; \, x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n) = p_1(\Delta x_1) \ldots p_n(\Delta x_n), \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad (3.2)$$

или, в явном виде, вспоминая, что $p_k(\Delta x_k) = p_{\Delta\xi_k}(x_k - x_{k-1})$,

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2 \ldots, x_n, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k - t_{k-1})}}\, e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\sigma^2(t_k - t_{k-1})}} \quad (3.3)$$

для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ и $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ (здесь $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$).

3.2. Марковское свойство винеровского процесса. Напомним, что такое условная плотность распределения. Если случайные величины имеют совместную плотность $p_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(\,\cdot\,)$, то условная плотность случайной величины ξ_n при условии, что значения случайных величин $\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1$ фиксированы, определяется как

$$p_{\xi_n|\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1}(x_n | x_{n-1}, \ldots, x_1) = \frac{p_{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{p_{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1})}, \qquad x_n \in \mathbb{R}.$$

В этой формуле переменная x_n выступает как аргумент функции, а переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ играют роль параметров этой функции. Условная плотность определена при всех $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, при которых знаменатель отличен от нуля. Можно записать дифференциальное равенство для условной плотности, связав её с вероятностью:

$$p_{\xi_n|\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1}(x_n | x_{n-1}, \ldots, x_1)\, dx_n =$$

$$= P(x_n \leqslant \xi_n < x_n + dx_n \,|\, x_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} < x_{n-1} + dx_{n-1},\, \ldots,\, x_1 \leqslant \xi_n < x_1 + dx_1)$$

(сравните с аналогичным равенством $p_{\xi_n}(x_n)\,dx_n = P(x_n \leqslant \xi_n < x_n + dx_n)$ для обычной, «безусловной», плотности). Можно также записать очевидные равенства

$$\begin{aligned}
p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) &= p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)p_{\xi_1}(x_1),\\
p_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x_1,x_2,x_3) &= p_{\xi_3|\xi_2,x_1}(x_3|x_1,x_2)p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) =\\
&= p_{\xi_3|\xi_2,x_1}(x_3|x_1,x_2)p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)p_{\xi_1}(x_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) &= p_{\xi_n|\xi_{n-1},\ldots,\xi_1}(x_n|x_{n-1},\ldots,x_1)\ldots p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)p_{\xi_1}(x_1).
\end{aligned}$$

Как и для условной вероятности, для условной плотности имеет место формула полной вероятности (запишем её для $n = 2$)

$$p_{\xi_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)p_{\xi_1}(x_1)\,dx_1.$$

Здесь мы считаем, что $x_1 \in \mathbb{R}$, а те x_1, для которых $p_{\xi_1}(x_1) = 0$ и значение условной плотности не определено, в произведении дают[1)] $p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)p_{\xi_1} = p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = 0$ и не вносят вклада в интеграл. Также справедлива формула Байеса

$$p_{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2) = \frac{p_{\xi_2|\xi_2}(x_2|x_2)p_{\xi_1}(x_1)}{p_{\xi_2}(x_2)} = \frac{p_{\xi_2|\xi_2}(x_2|x_2)p_{\xi_1}(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|z_1)p_{\xi_1}(z_1)\,dz_1}.$$

Теперь применим аппарат условных плотностей к винеровскому процессу, имеем в силу (3.2), (3.3)

$$\begin{aligned}
&\pi(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\,\ldots\,;x_1,t_1) \overset{\text{def}}{=\!=} p_{\xi_n(t_n)|\xi_{n-1}(t_{n-1}),\ldots,\xi_1(t_1)}(x_n|x_{n-1},\ldots,x_1) =\\
&\quad= \frac{p(x_1,t_1;\,\ldots\,;x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)}{p(x_1,t_1;\,\ldots\,;x_{n-1},t_{n-1})} =\\
&\quad= \frac{p_1(x_1)\ldots p_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})p_n(x_n-x_{n-1})}{p_1(x_1)\ldots p_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2}))} = p_n(x_n-x_{n-1})
\end{aligned}$$

или, в явном виде,

$$\pi(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\,\ldots\,;x_1,t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_n-t_{n-1})}}\,e^{-\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2\sigma^2(t_n-t_{n-1})}}.$$

Видно, что правая часть этого равенства зависит только от x_{n-1}, t_{n-1} и не зависит от переменных x_k, t_k с более ранними номерами. Мы имеем полную аналогию с марковским свойством для процесса с дискретным множеством состояний. Последнее равенство перепишем как

$$\pi(x,t|z,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}}\,e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2(t-s)}}. \tag{3.4}$$

[1)] По аналогии с условной вероятностью: если $P(A_1) = 0$, то формально $P(A_2\,|\,A_1)P(A_1) = 0$, потому что $P(A_2\,|\,A_1)P(A_1) = P(A_1 \cap A_2) = 0$.

Справедливо уравнение Чепмена–Колмогорова: если $t_1 < t_2 < t_3$, то для любого времени t_2, удовлетворяющего этому условию,

$$\pi(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x_3, t_3|x_2, t_2)\, \pi(x_2, t_2|x_1, t_1)\, dx_2. \tag{3.5}$$

В самом деле, если мы для краткости положим $p_{123}(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3)$ для трёхмерной плотности и аналогично $p_{kj}(x_k) = p(x_k, t_k; x_j, t_j)$ и $p_k(x_k) = p(x_k, t_k)$ для двумерной и одномерной плотностей, а также введём аналогичные обозначения типа $p_{k|j}(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ для условных плотностей (зависимость от t_k в данном случае не является важной), то в силу марковского свойства и по определению условной плотности мы имеем

$$p_{3|2}(x_3|x_2) = p_{3|2,1}(x_3|x_2, 1) = \frac{p_{1,2,3}(x_1, x_2, x_3)}{p_{1,2}(x_1, x_2)}, \qquad p_{(2|1)}(x_2|x_1) = \frac{p_{1,2}(x_1, x_2)}{p_1(x_1)}.$$

Подставляя эти равенства в правую часть (3.5), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \pi(x_3, t_3|x_2, t_2)\, \pi(x_2, t_2|x_1, t_1)\, dx_2 = \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} p_{3|2}(x_3|x_2) p_{2|1}(x_2|x_1)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{1,2,3}(x_1, x_2, x_3)}{p_{1,2}(x_1, x_2)} \frac{p_{1,2}(x_1, x_2)}{p_1(x_1)}\, dx_2 = \\
&\quad = \frac{1}{p_1(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} p_{1,2,3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 = \frac{p_{1,3}(x_1, x_3)}{p_1(x_1)} = p_{3|1}(x_3|x_1),
\end{aligned}$$

и последнее выражение, если вернуться к исходными обозначениям $\pi(\,\cdot\,)$, совпадает с левой частью (3.5).

3.3. Винеровский процесс как математическая модель случайных блужданий. Рассмотрим простейшую модель симметричных блужданий по действительной прямой. Пусть в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$, $k = 1, 2, \ldots$, частица совершает прыжки длины Δx влево и вправо, выбирая каждое из двух возможных направлений случайным образом с вероятностью 1/2. Пусть $w(t_n)$ – положение частицы в момент времени t_n. Представим случайную величину $w(t_n)$ в виде (здесь $\Delta w_k = w(t_k) - w(t_{k-1})$, $w(0) = 0$)

$$w(t_n) = \Delta w_1 + \cdots + \Delta w_n, \qquad P(\Delta w_k = \Delta x) = P(\Delta w_k = -\Delta x) = \frac{1}{2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что $M\Delta w_k = 0$, $M\Delta w_k = (\Delta x)^2/2$. Если мы считаем случайные величины $\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots$ независимыми, то к их сумме применима центральная предельная теорема:

$$\frac{1}{\sqrt{n(\Delta x)^2}} \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k \to \xi^*, \qquad n \to \infty,$$

где сходимость понимается как сходимость по распределению, величина ξ^* имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией.

Теперь рассмотрим случайный процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывным временем как следующий непрерывный предел описанных выше случайных блужданий: пусть время $t > 0$ фиксировано, положим $t = n\Delta t$ и $n \to \infty$, причём вместе с $\Delta t \to 0$ потребуем стремления к нулю и Δx так, что

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 = \mathrm{const}. \tag{3.6}$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}}\, w(t) = \sqrt{\frac{\Delta t}{\sigma^2 t}} \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k = \frac{1}{\sqrt{n(\Delta x)^2}} \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k \to \xi^*,$$

другими словами, в непрерывном пределе случайная величина $w(t)/\sqrt{\sigma^2 t}$ имеет стандартное нормальное распределение, и это эквивалентно тому, что $w(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$. Независимость приращений и однородность процесса вытекают из соответствующих свойств случайных блужданий. Таким образом, процесс Винера можно рассматривать как предельный вариант дискретных случайных блужданий вдоль действительной прямой, когда промежутки времени между скачками и длина скачка согласованно (см. (3.6)) стремятся к нулю. Принято называть такую модель одномерным броуновским движением.

3.4. Аналитические свойства траекторий процесса Винера. Распределение приращения $w(t+h) - w(t)$ имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma^2 h$, поэтому вследствие неравенства Чебышёва

$$P(|w(t+h) - w(t)| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2 h}{\varepsilon^2} \to 0, \qquad h \to +0,$$

а это означает, что $w(t+h) - w(t) \to 0$ по вероятности, если $h \to +0$. Ещё более очевидно, что $M\big(w(t+h) - w(t)\big)^2 = \sigma^2 h \to 0$, т. е. $w(t+h) - w(t) \to 0$ в среднем квадратичном смысле. Значительно сложнее показать сходимость с вероятностью единица. Для доказательства этого факта нам потребуется лемма Бореля–Кантелли и обобщённое неравенство Чебышёва.

Лемма 3.1. *Пусть $g(\cdot)$ – произвольная неубывающая функция, принимающая неотрицательные значения, и для случайной величины ξ существует $Mg(\xi)$. Тогда для любого действительного числа c, при котором $h(c) > 0$, справедливо неравенство*

$$P(\xi \geqslant c) \leqslant \frac{Mg(\xi)}{g(c)}\,. \tag{3.7}$$

Доказательство. Имеем цепочку оценок, аналогичную той, которая доказывает стандартное неравенство Чебышёва:

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{c} g(x)\, dF(x) + \int_{c}^{+\infty} g(x)\, dF(x) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{c}^{+\infty} g(x)\, dF(x) \geqslant g(c) \int_{c}^{+\infty} dF(x),$$

поскольку $g(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant g(c) \geqslant 0$ при $x \geqslant c$. Интеграл в правой части равен $P(\xi \geqslant c)$, отсюда $Mg(\xi) \geqslant g(c)P(\xi \geqslant c)$, что при $g(c) \neq 0$ эквивалентно (3.7).

Теорема 3.1. *Пусть $w(\omega,t)$, $\omega\in\Omega$, $t\geqslant 0$, – процесс Винера. Для любого фиксированного $t>0$*

$$P\big\{\omega\colon \lim_{h\to 0} w(\omega,t+h)=w(\omega,t)\big\}=1. \tag{3.8}$$

Доказательство. Докажем непрерывность траектории в точке $t>0$ справа, непрерывность слева доказывается полностью аналогично.

Дадим определение непрерывности: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $0<\Delta h\leqslant\delta$ имеет место неравенство $|w(t+\Delta h)-w(t)|<\varepsilon$. Теперь заменим произвольное (достаточно малое) $\varepsilon>0$ на $1/m$, (малую) величину $\delta>0$ заменим на $1/n$, а неравенство $0<\Delta h<\delta$ заменим на $\Delta h=1/k$, где $m,n,k\in\mathbb{N}$ и $k\geqslant n$ произвольны. Получим ещё одно (очевидно, эквивалентное предыдущему) определение. Траектория процесса Винера непрерывна в точке $t>0$ справа, если для любого $m\in\mathbb{N}$ найдётся $n\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $k\geqslant n$ имеет место неравенство $|w(t+1/k)-w(t)|<1/m$. Теперь мы можем записать множество под знаком вероятности в (3.8) стандартным образом:

$$\big\{\omega\colon \lim_{h\to 0} w(\omega,t+h)=w(\omega,t)\big\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\big\{\omega\colon |w(t+1/k)-w(t)|<1/m\big\}.$$

Положим для краткости

$$\begin{aligned}&\big\{\omega\colon |w(t+1/k)-w(t)|<1/m\big\}=A_k^{(m)},\\ &\big\{\omega\colon |w(t+1/k)-w(t)|\geqslant 1/m\big\}=B_k^{(m)}=\overline{A_k^{(m)}}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\big\{\omega\colon |w(t+1/k)-w(t)|<1/m\big\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^{(m)}=\liminf_{n\to\infty}A_n^{(m)}\overset{\text{def}}{=\!=}A_*^{(m)}.$$

В этих обозначениях утверждение теоремы записывается как

$$P\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}A_*^{(m)}\Big)=1\quad\Longleftrightarrow\quad P\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}B_*^{(m)}\Big)=0,\quad B_*^{(m)}\overset{\text{def}}{=\!=}\limsup_{n\to\infty}B_n^{(m)}.$$

Если мы покажем, что равенство $P(B_*^{(m)})=0$ выполнено для любого $m=1,2,\dots$, то, очевидно, будем иметь для любого $M=1,2,\dots$

$$P\Big(\bigcup_{m=1}^{M}B_*^{(m)}\Big)\leqslant\sum_{m=1}^{M}P(B_*^{(m)})=0,$$

а переходя к пределу $M\to\infty$, получим в силу включения $\bigcup_{m=1}^{M}B_*^{(m)}\subset\bigcup_{m=1}^{M+1}B_*^{(m)}$

$$P\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}B_*^{(m)}\Big)=\lim_{M\to\infty}P\Big(\bigcup_{m=1}^{M}B_*^{(m)}\Big)=0.$$

Итак, для доказательства нам достаточно показать, что $P(\limsup_{n\to\infty}B_n^{(m)})=0$. А для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы было выполнено условие (лемма

Бореля–Кантелли)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n^{(m)}) < \infty \quad \text{для} \quad P(|w(t+1/n) - w(t)| \geqslant 1/m). \tag{3.10}$$

Теперь попытаемся оценить по порядку величины n слагаемое этого ряда. Приращение $w(t+1/n) - w(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2/n. Тогда имеем по стандартному неравенству Чебышёва

$$P\biggl(|w(t+1/n) - w(t)| \geqslant \frac{1}{m}\biggr) \leqslant \frac{m^2\sigma^2}{n} = O(n^{-1}),$$

и мы видим, что данное неравенство не может помочь нам в доказательстве сходимости ряда. Но мы можем воспользоваться обобщённым неравенством Чебышёва (3.7) для $\xi = |w(t+1/n) - w(t)|$ и $g(x) = x^4$. Тогда, как нетрудно показать, $M(w(t+1/n) - w(t))^4 = 3\sigma^4/n^2$. Отсюда

$$P\biggl(|w(t+1/n) - w(t)| \geqslant \frac{1}{m}\biggr) \leqslant \frac{m^4\sigma^2}{n^2} = O(n^{-2}),$$

что доказывает условие (3.10) и вместе с ним всю теорему.

С точки зрения траекторий доказанное свойсвто означает, что почти все траектории процесса Винера – функции, непрерывные в каждой точке $t \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь случайную величину $\frac{w(t+h)-w(t)}{h}$, она распределена нормально с нулевым средним, но её дисперсия $\sigma^2 h/h^2 = \sigma^2/h \to \infty$ при $h \to +0$. Это означает, что данная случайная величина едва ли может иметь предел при $h \to +0$ в каком-либо смысле. Оказывается, справедливо следующее утверждение, которое мы оставим без доказательства:

$$P\biggl\{\omega \in \Omega\colon \text{ существует } \lim_{h\to+0} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \text{ хотя бы для одного } t \geqslant 0\biggr\} = 0,$$

то есть почти все траектории процесса Винера являются *нигде не дифференцируемыми* функциями.

3.5. Процесс Винера и уравнение теплопроводности. В этом пункте мы покажем, как получить процесс Винера из некоторых достаточно общих предположений о поведении одномерной плотности распределения.

Теорема 3.2. *Пусть случайный процесс $w(t)$, $t \geqslant 0$, является однородным процессом с независимыми приращениями, начинающимся в нуле. Пусть распределение приращения $\Delta w(h) = w(t+h) - w(t)$ абсолютно непрерывно и плотность $p(\,\cdot\,, h)$ распределения случайной величины $\Delta w(h)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *частные производные $\frac{\partial^k p(x,t)}{\partial x^k}$ непрерывны по x и ограничены вплоть до третьего порядка ($k = 1, 2, 3$) для всех $x \in \mathbb{R}$ при любом фиксированном $t > 0$ и непрерывны по t вплоть до второго порядка ($k = 1, 2$) для всех $t > 0$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$;*

2) *при $h \to +0$ имеют место асимптотические равенства для моментов случайной величины $\Delta w(h)$*

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} xp(x,h)\,dx = M_1 + o(h),\\ \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x,h)\,dx = M_2 + o(h),\\ \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3p(x,h)\,dx = M_3 + o(h), \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $M_1 = 0$, $M_2 = \sigma^2 > 0$, $M_3 = 0$.

Тогда случайная величина $w(t)$ при каждом $t > 0$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$:

$$p_{w(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < z < \infty. \tag{3.12}$$

Доказательство. Выразим случайную величину $w(t+h)$ через приращения: с учётом того, что по условию процесс начинается в нуле, $P(w(0)=0)=1$, имеем

$$w(t+h) = w(t+h)-w(0) = w(t+h)-w(t)+w(t)-w(0), \qquad \Delta w(t+h) = \Delta w(h)+\Delta w(t),$$

причём слагаемые в правой части последнего равенства суть независимые случайные величины. Плотность распределения суммы независимых случайных величин есть свёртка плотностей распределения слагаемых, и в наших обозначениях мы имеем

$$p(z,t+h) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z-x,t)p(x,h)\,dx. \tag{3.13}$$

Теперь разложим $p(z-x,t)$ в ряд Тейлора по x до третьего порядка:

$$p(z-x,t) = p(z,t) - x\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} - \frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3},$$

где $z - x \leqslant z_x^* \leqslant z$. Первая и вторая частные производные не зависят от x и в формуле (3.13) могут быть вынесены из интеграла, а третья производная по условию ограничена на всей числовой прямой,

$$\left|\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3}\right| \leqslant C.$$

Кроме того, с учётом нормировки плотности и условий (3.11) мы можем записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x,t)\,dx = h\big(M_k + o(h)\big), \quad k = 1,2,3.$$

Подставляя все эти соотношения в (3.13), получаем

$$p(z,t+h) = p(z,t) - h\big(M_1+o(h)\big)\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{h(M_k+o(h))}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3}p(x,t)\,dx. \tag{3.14}$$

Последнее слагаемое в силу ограниченности третьей производной допускает оценку

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 p(z_x^*,t)}{\partial z^3}p(x,t)\,dx\right| \leqslant C\left|\int_{-\infty}^{\infty}|x|^3 p(x,t)\,dx\right| = C\big(M_3+o(h)\big). \tag{3.15}$$

Теперь подставим в (3.14), (3.15) значения $M_1=M_3=0$ и $M_2=\sigma^2$ и получим

$$\frac{p(z,t+h)-p(z,t)}{h}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2}+o(h), \tag{3.16}$$

что в пределе $h\to+0$ даёт дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2}. \tag{3.17}$$

Это уравнение необходимо дополнить условием неотрицательности плотности распределения, условием нормировки $\int_{-\infty}^{\infty}p(x,t)\,dx=1$ и сингулярным начальным условием $p(z,0)=\delta(0)$, которое согласуется с требованием $P(w(0)=0)=1$. Решением полученной задачи является функция

$$p_(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty<z<\infty. \tag{3.18}$$

Тем самым теорема доказана.

Замечание 3.3. На самом деле, переходя в (3.16) к пределу $h\to+0$, мы получили правую производную по времени. Для расчёта левой производной при $t>0$ следует взять $0<h<t$ и всюду заменить $t+h$ на t и t – на $t-h>0$. Тогда вместо (3.16) мы получим

$$\frac{p(z,t)-p(z,t-h)}{h}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t-h)}{\partial z^2}+o(h),$$

но мы предположили, что производная в правой части (как функция двух переменных x и t) непрерывна по t при любом $t>0$ и фиксированном x. Поэтому вновь получаем при $h\to+0$ уравнение (3.17). В нём производная по времени левая, а вторая производная по z осталась без изменений. Таким образом, мы можем утверждать, что производная по времени в уравнении (3.17) понимается в классическом смысле.

Замечание 3.4. Соотношения $M_2=\sigma^2>0$ и $M_3=0$ в условиях (3.11) говорят о том, что при малых h малые отклонения случайной величины $w(h)$ от нуля более вероятны, чем большие.

Замечание 3.5. Если в условиях (3.11) положить $M_1=\mu\neq 0$, то мы получим вместо (3.17) уравнение

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial t}=-\mu\frac{\partial p(z,t)}{\partial z}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2}.$$

с теми же условиями неотрицательности, нормировки и начальным условием, что и выше. Заменой $x - \mu t \mapsto x$ это уравнение сводится к (3.17) и, возвращаясь к исходной переменной, мы получаем решение

$$p_(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(z-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Такой случайный процесс отвечает переходу к непрерывному пределу в модели несимметричных случайных блужданий (см. п. 3.3), в которых прыжок направо совершается с вероятностью p, а прыжок налево – с вероятностью q, $p+q=1$ и $p-q=\mu$.

3.6. Распределение времени первого достижения данного уровня. Как обычно, будем считать, что случайный процесс Винера стартует из нуля. Зафиксируем некоторое значение $x > 0$ и определим случайную величину τ_x, равную моменту первого достижения траекторией процесса точки x. А именно, $\tau_x = t$, если $w(s) < x$ для всех $0 \leqslant s < t$ и $w(t) = x$.

Найдём распределение случайной величины τ_x. Для решения этой задачи мы примем без доказательства одно тождество:

$$P(w(t) \leqslant z \,|\, \tau_z \leqslant t) = P(w(t) \geqslant z \,|\, \tau_z \geqslant u) = \frac{1}{2}, \qquad z >, \quad t > 0. \tag{3.19}$$

Смысл этого равенства в том, что если в какой-то момент времени $\tau_x = s$ частица достигла точки z, то последующие блуждания (при $t \geqslant s$) симметричны относительно точки z. Это условие представляется довольно естественным, его можно понимать как «сдвиг» очевидного равенства $P(w(t) \leqslant 0) = P(w(t) \geqslant 0) = 1/2$, получающийся в результате сдвига начала координат на плоскости переменных $\big(t, \xi)$ из точки $(0,0)$ в точку (s,z). Заметим также, что это условие хорошо согласуется с марковским свойством процесса Винера.

На основании сделанного допущения найдём $F_{\tau_x}(t) = P(\tau_x < t)$. Очевидно, что если $\tau_x \geqslant t$, т. е. первое достижение точки с координатой x случилось не ранее, чем в момент времени t, то вплоть до момента времени t траектория процесса не поднималась выше уровня x, т. е. $w(t) \leqslant x$. Другими словами, событие $\tau_x \geqslant t$ влечёт $w(t) \leqslant x$, и, переходя к дополнениям этих событий, мы получаем, что событие $w(t) < x$ влечёт $\tau_x < t$. Следовательно, в (3.19)

$$\frac{1}{2} = P(w(t) > x \,|\, \tau_x < t) = \frac{P(w(t) > x, \tau_x < t)}{P(\tau_x < t)} = \frac{P(w(t) > x)}{P(\tau_x < t)},$$

откуда

$$\begin{aligned} F_{\tau_x}(t) = P(\tau_x < t) = 2P(w(t) > x) = 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}\, dz = \\ = 2\int_{x/\sqrt{\sigma^2 t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right)\right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $\Phi(\,\cdot\,)$ – так называемый интеграл вероятности (функция стандартного нормального распределения),

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz, \qquad \Phi'(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Найдём производную $F'_{\tau_x}(t) = p_{\tau_x}(t)$:

$$p_{\tau_x}(t) = -2\Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \cdot \frac{d}{dt}\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{x}{t^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad t > 0. \tag{3.21}$$

Здесь $x > 0$ есть параметр плотности распределения $p_{\tau_x}(\,\cdot\,)$.

Из формулы (3.21) нетрудно получить распределение случайной величины (далее $t > 0$ есть фиксированный параметр)

$$\xi^*(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s),$$

равной максимальному значению процесса Винера на промежутке $[0, t]$. Отметим, что в силу непрерывности траектории максимум достигается с вероятностью единица. Мы будем искать $F_t^*(x) = P(\xi^*(t) < x)$ для $x > 0$; при $x < 0$ следует заменить максимум на минимум и воспользоваться симметричностью процесса, т. е. тем, что $P(w(t) > 0 = P(w(t) < 0)$.

Нетрудно заметить, что если $\xi^*(t) < x$, то $w(s) < x$ для всех $s \in [0, t]$, и первое достижение траекторией уровня x с необходимостью наступает позже времени t, другими словами, $\tau_x > t$. Верно и обратное: если $\tau_x > t$, то при любом $s \leqslant t$ траектория процесса ещё не достигла уровня x, т. е. $w(s) < x$ для всех $s \in [0, t]$, а это влечёт $\xi^*(s) < x$. Таким образом, события $\xi^*(t) < x$ и $\tau_x > t$ равносильны, поэтому

$$F_t^*(x) = P(\xi^*(t) < x) = P(\tau_x > t) = 1 - P(\tau_x \leqslant t) = 1 - P(\tau_x < t) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) - 1.$$

Мы воспользовались тем, что распределение случайной величины τ_x абсолютно непрерывно ($P(\tau_x = t) = 0$), и формулой (3.20). Дифференцируя функцию распределения, получаем

$$p_t^*(x) = \frac{dF_t^*(x)}{dx} = 2\Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad x > 0.$$

Здесь $t > 0$ есть параметр плотности распределения $p_t^*(\,\cdot\,)$.

3.7. Закон арксинуса. Пусть, как и выше $\xi^*(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s)$, теперь $t > 0$ есть фиксированный параметр. Введём ещё одну случайную величину $\tau^*(t)$, равную первому моменту времени на промежутке $[0, t]$, когда траектория достигла своего максимального значения $\xi^*(t)$. Как уже отмечалось, вследствие непрерывности траектории такой момент времени с вероятностью единица существует. Вычислим плотность распределения этой случайной величины.

Дополнительно к $t > 0$ зафиксируем некоторое положительное $x \leqslant y$ и найдём условную плотность $p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u)$ при $u < t$. По определению

$$p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u)\, dy = P(y \leqslant \xi^*(t) < y + dy \,|\, u < \tau_x < u + du).$$

Дальнейшие рассуждения мы будем проводить не совсем строго, заменяя события $y \leqslant \xi^*(t) < y + dy$ и $u < \tau_x < u + du$ равенствами $\xi^*(t) = y$ и $\tau_x = u$, хотя, конечно же, $P(\xi^*(t) = y) = 0$ и $P(\tau_x = u) = 0$.

Если время первого достижения максимума $\tau_x = u$ и $x \leqslant y$, то до момента времени u траектория процесса ещё не достигла уровня x, следовательно, $w(s) < x$ для любого $s \in [0, u)$. Если мы считаем, что $y \geqslant x$, то тем более $w(s) < y$ для любого $s \in [0, u)$. Таким образом, максимальное значение y заведомо достигается после времени u,

$$y = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s) = \max_{u \leqslant s \leqslant t} w(s).$$

При этом в силу $\tau_x = u$ мы имеем $w(u) = x$, таким образом, при условии $\tau_x = u$ процесс $w(t)$, $t \geqslant u$, есть винеровский процесс, стартовавший из точки $w(t) = x$. Сдвинем начало координат (t, x) в пространстве переменных (t, ξ) в точку $(0, 0)$, т. е. совершим замену $\hat{w}(t) = w(t - u) - x$, где x и u – фиксированные неслучайные параметры. Стохастические свойства процесса $\hat{w}(t)$, $t \geqslant 0$, полностью эквивалентны свойствам процесса $w(t)$, $t \geqslant 0$. Таким образом, при условии $\tau_x = u$ случайная величина

$$\xi^*(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s) = \max_{u \leqslant s \leqslant t} w(s)$$

имеет то же распределение, что и случайная величина

$$x + \max_{u \leqslant s \leqslant t} \bigl(w(s) - x\bigr) = x + \max_{0 \leqslant s \leqslant t-u} \hat{w}(s) = x + \xi^*(t - u).$$

Нетрудно найти плотность распределения такой сдвинутой на x случайной величины: мы имеем $p_{x+\xi^*(t-u)}(y) = p_{\xi^*(t-u)}(y - x)$ или, в явном виде,

$$p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u) = p^*_{t-u}(y - x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{t-u}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad 0 < u < t, \quad 0 < x \leqslant y.$$

Далее запишем совместную плотность, используя формулу (3.21):

$$\begin{aligned} p_{\xi^*(t),\tau_x}(y, u) &= p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u)\, p_{\tau_x}(u) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{t-u}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{x}{u^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 u}} = \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \cdot \frac{x}{u} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 u}}, \qquad 0 < u < t, \quad 0 < x \leqslant y. \end{aligned}$$

В частности, при $x = y$

$$p_{\xi^*(t),\tau_y}(y, u) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \cdot \frac{y}{u} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad 0 < u < t. \tag{3.22}$$

Вспомним, что τ_x – момент, когда траектория винеровского процесса в первый раз достигает уровня x. Если нас интересует достижение уровня $x = y = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} w(t)$, то $\tau_x = \tau^*(t)$. Таким образом, формула (3.22) даёт нам совместную плотность случайных величин $\xi^*(t)$ и $\tau^*(t)$. Отсюда

$$\begin{aligned} p_{\tau^*(t)}(u) &= \int_0^\infty p_{\xi^*(t),\tau^*(t)}(y, u)\, dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \int_0^\infty \frac{y}{\sigma^2 u} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}}\, dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}}, \qquad 0 < u < t. \end{aligned}$$

Парадоксальность этого результата состоит в том, что плотность распределения времени достижения траекторией своего максимума увеличивается к концам отрезка $[0, t]$, т. е. максимум скорее всего будет достигнут либо в самом начале, либо в самом конце промежутка наблюдения за винеровским процессом. Если мы обратимся к функции распределения случайной величины $\tau^*(t)$, то получим после несложных вычислений

$$F_{\tau^*(t)}(u) = \int_0^u p_{\tau^*(t)}(\tilde{u})\, d\tilde{u} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{u}{t}}, \qquad 0 < u < t.$$

Это равенство носит название *закон арксинуса*.

4. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – случайный процесс с непрерывным временем. Будем считать, что каждая из случайных величин $\xi(t)$ принимает значения из одного и того же конечного множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$ при любом $t > 0$. Будем говорить, что в момент времени t система, описываемая данным процессом, пребывает в состоянии x_j, если реализовалось событие $\xi(t) = x_j$.

Определение 4.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в множестве $\{x_1, \ldots, x_s\}$ называется *марковским*, если при любых $n = 3, 4, \ldots$ и любых $t_1, t_2, \ldots t_n$, удовлетворяющих условию $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, случайные величины $\xi(t_0), \ldots, \xi(t_{n-1}), (\xi(t_n)$ образуют цепь Маркова, т. е. для любых $x_{i_0}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$, выбранных из множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} P(\xi(t_n) = x_{i_n} \,|\, \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_0) = x_{i_0}) = \\ = P(\xi(t_n) = x_{i_n} \,|\, \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Будем говорить, что марковский процесс является *однородным*, если

$$P(\xi(t+s) = x_j \,|\, \xi(s) = x_i) = \pi_{ij}(t), \qquad i, j = 1, \ldots, s, \tag{4.2}$$

для любых $0 \leqslant s < t$. Вероятности $\pi_{ij}(t)$ называются *вероятностями перехода* из состояния x_i в состояние x_i за время $t > 0$.

Всюду далее мы рассматриваем только однородные марковские процессы с конечным множеством состояний ($1 < s < \infty$).

Чтобы найти любое конечномерное распределение марковского процесса, нужно задать начальное распределение

$$P(\xi(0) = x_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, s, \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i = 1, \tag{4.3}$$

и матрицу вероятностей перехода $\pi(t)$ за любое конечное время $t > 0$. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ и для любых $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$

$$P(\xi(0) = x_{i_0}, \xi(t_1) = x_{i_1}, \ldots, \xi(t_n) = x_{i_n}) = a_i \pi_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \ldots \pi_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}), \tag{4.4}$$

Нетрудно также рассчитать распределение процесса в любой момент времени $t > 0$, пользуясь формулой полной вероятности:

$$P(\xi(t) = x_j) = \sum_{i=1}^{s} a_i \pi_{ij}(t), \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Равенства (4.2) задают на множестве $\{t > 0\}$ матричнозначную функцию $\pi(\,\cdot\,)$ со значениями в множестве $\mathrm{Mat}(s)$ матриц размера $s \times s$. Для этой функции справедливы общие свойства матриц перехода в цепях Маркова: неотрицательность матричных элементов, равенство

$$\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}(t) = 1, \qquad i = 1, \ldots, s, \qquad t > 0, \tag{4.5}$$

отражающее условие нормировки условного распределения случайной величины $\xi(t)$ при фиксированном начальном состоянии $\xi(0) = x_i$, и уравнение Чепмена–Колмогорова

$$\pi_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\pi_{kj}(s) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(s)\pi_{kj}(t), \qquad i,j = 1,\ldots,s, \qquad t,s > 0, \quad (4.6)$$

являющееся прямым следствием условия (4.1) и формулы полной вероятности. Это уравнение удобнее писать в матричном виде

$$\pi(t+s) = \pi(t)\pi(s) = \pi(s)\pi(t), \qquad t,s > 0. \quad (4.7)$$

Как следствие этого уравнения можно записать, например, матричное равенство $\pi(n \cdot t) = \pi^n(t)$ для любого натурального n и любого $t > 0$.

По сути марковский процесс есть цепь Маркова, в которой переходы между состояниями происходят не в фиксированные дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, а через произвольные промежутки $\Delta t > 0$. Доопределим матричнозначную функцию $\pi(\,\cdot\,)$ в точке $t = 0$, наложив совершенно очевидное условие $\pi(0) = I$, где I – единичная $(s \times s)$-матрица, т. е.

$$\pi_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4.8)$$

Это условие говорит о том, что за нулевое время система не сможет совершить никакого перехода и останется в своём состоянии.

В дальнейшем нас будут интересовать аналитические свойства матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{M}_s$: непрерывность, дифференцируемость и пр. Условимся, что матричные равенства, связанные с предельными переходами, мы будем понимать как поэлементные, например

$$\lim_{h\to+0} \pi(h) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{h\to+0} \pi_{ij}(h) = A_{ij} \quad \text{для всех} \quad i,j = 1,\ldots,s,$$

а равенства

$$\dot{\pi}(t) \equiv \frac{d\pi}{dt} = D, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \pi(t)\,dt = J$$

эквивалентны

$$\dot{\pi}_{ij}(t) \equiv \frac{d\pi_{ij}}{dt} = D_{ij}, \quad \int_{t_1}^{t_2} \pi_{ij}(t)\,dt = V_{ij} \quad \text{для всех} \quad i,j = 1,\ldots,s.$$

Здесь $A, D, J \in \mathrm{Mat}(s)$.

4.1. Система уравнений Колмогорова для матриц перехода. В наших математических выкладках очень важную роль будет играть условие $s < \infty$. Оно позволит нам менять местами предельные переходы и любые суммы или произведения по состояниям:

$$\lim_{h\to+0} \sum_{i=1}^{s} (\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{s} \lim_{h\to+0} (\,\cdot\,), \qquad \lim_{h\to+0} \prod_{i=1}^{s} (\,\cdot\,) = \prod_{i=1}^{s} \lim_{h\to+0} (\,\cdot\,).$$

Для бесконечного (счётного) числа состояний эти равенства требуют обоснования, но многие утверждения тем не менее останутся верными, возможно, при некоторых дополнительных условиях.

Докажем несколько лемм.

Лемма 4.2. *При любом $t \geqslant 0$ матрица $\pi(t)$ невырождена.*

Доказательство. Заметим, что в силу (4.8) определитель матрицы $\pi(h)$ как некоторая вполне конкретная (конечная) сумма произведений её элементов стремится при $h \to +0$ к определителю матрицы I, т. е. к единице. Поэтому найдётся такое $h_0 > 0$, что $\det \pi(h) \neq 0$ при $h < h_0$. Это означает, что матрица $\pi(h)$ невырождена при достаточно малых h. Далее, для произвольного фиксированного $t > 0$ всегда можно найти такое натуральное n, что $t/n < h_0$. Тогда по уравнению Чепмена–Колмогорова

$$\det \pi(h) = \det \pi^n(t/n) = \bigl(\det \pi(t/n)\bigr)^n \neq 0, \qquad t/n < h_0,$$

а это и означает, что матрица $\det \pi(h)$ невырождена при любом $h > 0$.

Теперь покажем непрерывность матрицы перехода. Для $t = 0$ непрерывность будем понимать, конечно же, как непрерывность справа и постулируем эту непрерывность без доказательства: потребуем

$$\pi_{ij}(h) \to \delta_{ij} \quad \text{при} \quad h \to +0 \tag{4.9}$$

или, в матричной записи,

$$\pi(t) \to \pi(0) = I \quad \text{при} \quad t \to +0. \tag{4.10}$$

Это условие согласовано с (4.8) и означает, что, попав в любое состояние x_i, случайный процесс с вероятностью единица остаётся в этом состоянии некоторое положительное время. Точнее, если случайная величина τ_i равна времени пребывания в i-м состоянии, то $P(\tau_i > 0) = 1$.

Лемма 4.3. *Матричнозначная функция $\pi(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{M}_s$ непрерывна при всех $t > 0$, т. е. для любого фиксированного $t > 0$*

$$\lim_{h \to +0} \bigl(\pi(t+h) - \pi(t)\bigr) = \lim_{h \to +0} \bigl(\pi(t) - \pi(t-h)\bigr) = 0,$$

где в правой части равенства 0 означает матрицу, все элементы которой равны нулю[2)].

Доказательство. Непрерывность справа непосредственно вытекает из уравнения Чепмена–Колмогорова (4.7) и условия (4.10):

$$\pi_{ij}(t+h) - \pi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\pi_{kj}(h) - \pi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\bigl(\pi_{kj}(h) - \delta_{kj}\bigr) \to 0, \quad h \to +0,$$

при любых $i, j = 1, \ldots, s$ для любого фиксированного $t > 0$.

[2)] Мы не вводим специальных обозначений, отличающих 0 как нулевую матрицу от числа 0; предполагается, что природа равенства должна сама подсказать, о каком нуле идёт речь.

Непрерывность слева также следует из уравнения Чепмена–Колмогорова, но потребуются чуть более сложные рассуждения. Для $t > 0$ и $0 < h < t$ имеем

$$\pi(t) - \pi(t-h) = \pi(t-h)\big(\pi(h) - I\big),$$

отсюда в силу $0 \leqslant \pi_{ik}(t-h) \leqslant 1$ получаем оценку

$$|\pi_{ij}(t) - \pi_{ij}(t-h)| = \left| \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t-h)\big(\pi_{kj}(h) - \delta_{ij}\big) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t-h)|\pi_{kj}(h) - \delta_{kj}| \leqslant \sum_{k=1}^{s} |\pi_{kj}(h) - \delta_{kj}| \to 0, \quad h \to +0,$$

при любых $i, j = 1, \ldots, s$ для любого фиксированного $t > 0$. Лемма доказана.

Теперь исследуем матрицу $\dot{\pi}(t)$ с элементами

$$\dot{\pi}_{ij}(t) = \frac{d\pi_{ij}}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\pi(t+h) - \pi(t)}{h}, \qquad i, j = 1, \ldots, s.$$

Лемма 4.4. *Зададим матричнозначную функцию*

$$J(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du, \qquad 0 < t_1 < t_2.$$

Тогда при достаточно малой разности $t_2 - t_1$ *существует обратная матрица* $R(t_1, t_2) = J^{-1}(t_1, t_2)$.

Доказательство. Пользуясь непрерывностью $\pi(\,\cdot\,)$ как матричнозначной функции на $\mathbb{R}_+$, запишем формулу среднего для каждого элемента матрицы: для любых $0 < t_1 < t_2$ при каждых $i, j \in \{1, \ldots, s\}$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \pi_{ij}(u)\, du = \pi_{ij}(t_1 + h_{ij}), \qquad 0 \leqslant h_{ij} \leqslant t_2 - t_1.$$

Опять же в силу непрерывности $\pi(\,\cdot\,)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta_{ij} > 0$ такая, что $|\pi_{ij}(t_1 + h_{ij}) - \pi_{ij}(t_1)| < \varepsilon$, если $h_{ij} < \delta_{ij}$. Выберем минимальную по $i, j = 1, \ldots, s$ величину δ_{ij} и обозначим её как δ. Тогда для любого $t_1 > 0$ с учётом введённого в условии леммы обозначения

$$\left| \frac{J_{ij}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} - \pi_{ij}(t_1) \right| = |\pi_{ij}(t_1 + h_{ij}) - \pi_{ij}(t_1)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad 0 < t_2 - t_1 < \delta. \tag{4.11}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(t_1, \varepsilon)$ такое, что

$$\left| \frac{\det J(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} - \det \pi_{ij}(t_1) \right| < \varepsilon, \qquad 0 < t_2 - t_1 < \delta.$$

Поскольку $\det \pi(t_1) \neq 0$ при любом $t_1 \geqslant 0$, мы можем выбрать какое-либо положительное $\varepsilon < |\det \pi(t_1)|$ и зафиксировать его. Теперь δ определяется только значением t_1 и

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \det J(t_1, t_2) > \det \pi_{ij}(t_1) - \varepsilon \neq 0, \quad \text{если} \quad 0 < t_2 - t_1 < \delta.$$

Следовательно, при $0 < t_2 - t_1 < \delta$ существует $R(t_1, t_2) = J^{-1}(t_1, t_2)$.

Лемма 4.5. *Матричнозначная функция $\pi(\cdot)$ имеет правую производную в точке $t = 0$, т.е. существует матрица Λ размера $s \times s$ такая, что*

$$\lim_{h \to +0} \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h} = \Lambda. \tag{4.12}$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением (4.7) Чепмена–Колмогорова и запишем цепочку матричных равенств для $h > 0$ и любых $0 < t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}\big(\pi(h) - I\big) \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du &= \int_{t_1}^{t_2} \pi(h)\pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \pi(u+h)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du = \int_{t_1+h}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du.\end{aligned}$$

Теперь будем считать, что $0 < h < t_2 - t_1$, тогда $t_1 < t_1 + h < t_2 < t_2 + h$ и

$$\int_{t_1+h}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du = \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du.$$

В обозначениях леммы 4.4 мы можем записать результат нашей цепочки преобразований как

$$\big(\pi(h) - I\big) J(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du, \tag{4.13}$$

и это равенство верно для любых $0 < t_1 < t_2$ и $0 < h < t_2 - t_1$.

Пусть теперь $t_2 - t_1 < \delta$, где $\delta = \delta(t_1)$ взято из леммы 4.4. Тогда

$$\frac{\pi(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h} \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \frac{1}{h} \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du\right) R(t_1, t_2).$$

При $h \to +0$ с учетом формул (4.11) для средних значений интегралов в правой части равенства существует

$$\lim_{h \to +0} \left(\int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du \right) = \big(\pi(t_2) - \pi(t_1)\big) R(t_1, t_2).$$

Следовательно,

$$\lim_{h \to +0} \frac{\pi(h) - I}{h} = \big(\pi(t_2) - \pi(t_1)\big) R(t_1, t_2), \tag{4.14}$$

причём это равенство верно при любых достаточно близких друг другу положительных временах $t_1 < t_2$. Выберем какие-либо удовлетворяющие всем необходимым условиям t_1 и t_2, зафиксируем их и для этих фиксированных времён обозначим матрицу в правой части равенства (4.14) через Λ. Тогда, учитывая, что $I = \pi(0)$, получаем

$$\lim_{h \to +0} \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h} = \Lambda.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Матрица $\pi(\,\cdot\,)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и удовлетворяет уравнениям Колмогорова*

$$\dot{\pi}(t) = \Lambda\pi(t), \tag{4.15}$$

$$\dot{\pi}(t) = \pi(t)\Lambda. \tag{4.16}$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением (4.7). Для произвольного $t > 0$ имеем

$$\frac{\pi(t+h) - \pi(t)}{h} = \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h}\pi(t) = \pi(t)\frac{\pi(h) - \pi(0)}{h},$$

откуда

$$\lim_{h\to+0} \frac{\pi(t+h) - \pi(t)}{h} = \Lambda\pi(t) = \pi(t)\Lambda, \tag{4.17}$$

т. е. матрица $\pi(t)$ имеет правую производную при всех $t > 0$ и для правой производной верны уравнения (4.15) и (4.16).

Теперь найдём левую производную. Зафиксируем $t > 0$ и выберем $0 < h < t$, тогда

$$\frac{\pi(t) - \pi(t-h)}{h} = \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h}\pi(t-h) = \pi(t-h)\frac{\pi(h) - \pi(0)}{h},$$

перейдём к пределу при $h \to +0$, учитывая непрерывность $\pi(t-h) \to \pi(t)$, получим

$$\lim_{h\to+0} \frac{\pi(t) - \pi(t-h)}{h} = \Lambda\pi(t) = \pi(t)\Lambda, \tag{4.18}$$

и эти равенства вместе с (4.17) влекут уравнения (4.15), (4.16).

Непрерывность матричнозначной функции $\dot{\pi}(t)$, $t > 0$, непосредственно следует из непрерывности матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)$ и любого из уравнений (4.15), (4.16). Теорема доказана.

Замечание 4.6. В случае счётного числа состояний система уравнений Колмогорова также верна, но следует наложить на матрицы $\pi(t)$ некоторые дополнительные условия.

4.2. Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний. Положим $p_i(t) = P(\xi(t) = x_i)$, $i = 1, \ldots, s$, и выведем из уравнения (4.16) систему дифференциальных уравнений для функций $p_i(\,\cdot\,)$. Имеем

$$p_j(t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} P(\xi(t) = x_j) = \sum_{i=1}^{s} P(\xi(t) = x_j \,|\, \xi(0) = x_i)P(\xi(0) = x_i) = \sum_{i=1}^{s} \pi_{ij}(t)a_i,$$

где a_i – начальная вероятность. Отсюда в силу уравнения (4.16)

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{i=1}^{s} \dot{\pi}_{ij}(t)a_i = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\Lambda_{kj}\right)a_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \Lambda_{kj}\left(\sum_{i=1}^{s} \pi_{ik}(t)a_i\right) = \sum_{k=1}^{s} p_k(t)\Lambda_{kj},$$

Итак, мы имеем

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{k=1}^{s} p_k(t)\Lambda_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{4.19}$$

В ряде случаев уравнение (4.19) удобно записать в другом виде. Заметим, что для любого $j = 1, \ldots, s$ и любого $h > 0$

$$\sum_{k=1}^{s} \bigl(\pi_{jk}(h) - \delta_{jk}\bigr) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{jk}(h) - 1 = 0,$$

поскольку выполнено условие стохастичности $\sum_{k=1}^{s} \pi_{jk}(h) = 1$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{s} \Lambda_{jk} = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{s} \bigl(\pi_{jk}(h) - \delta_{jk}\bigr) = 0, \qquad \Lambda_{jj} = -\sum_{k\colon k\neq j} \Lambda_{jk}.$$

Таким образом, получаем

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{k\colon k\neq j}^{s} p_k(t)\Lambda_{kj} - p_j(t) \sum_{k\colon k\neq j} \Lambda_{jk}, \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{4.20}$$

Этот вид уравнения полностью отвечает физическому смыслу переходов в марковском процессе. Перепишем (4.20) как следующее приближённое равенство при малом $h > 0$, учтя, что $\Lambda = \dot{\pi}(0)$:

$$\begin{aligned} p_j(t+h) - p_j(t) &\approx \sum_{k\colon k\neq j}^{s} p_k(t)\bigl(\pi_{kj}(h) - \delta_{kj}\bigr) - \sum_{k\colon k\neq j} p_j(t)\bigl(\pi_{jk}(h) - \delta_{jk}\bigr) = \\ &= \sum_{k\colon k\neq j}^{s} p_k(t)\pi_{kj}(h) - \sum_{k\colon k\neq j} p_j(t)\pi_{jk}(h). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Рассмотрим систему из большого числа N частиц, в которой каждая из частиц может находиться в одном из состояний $x_1, \ldots, x_s$, а динамика распределений по состояниям осуществляется по законам марковского процесса. Заменим вероятность на долю частиц в системе, находящихся в момент времени t в состоянии x_j, т. е. положим $p_j(t) \approx N_j(t)/N$. Тогда (4.21) описывает, как изменяется количество частиц, находящихся в момент t в состоянии x_j, за малое время h (уравнение баланса):

$$N_j(t+h) - N_j(t) \approx \sum_{k\colon k\neq j}^{s} N_k(t)P_{k\to j}(h) - \sum_{k\colon k\neq j} N_j(t)P_{j\to k}(h), \tag{4.22}$$

где $P_{k\to j}(h)$ – вероятность перехода из x_k в x_j за время h. При этом первая сумма в правой части (4.22) даёт число частиц, пришедших в состояние x_j из всех других состояний, а вторая – число частиц, ушедших из состояния x_j в какое-либо другое состояние. Мы полагаем, что за малое время происходит не более одного перехода, что согласуется с разложением $\pi(h) = I + \Lambda h + o(h)$.

Система уравнений (4.19) или (4.20) дополняется начальным условием $p_j(0) = a_j$, $j = 1, \ldots, s$. Имеет место также условие нормировки $\sum_{j=1}^{s} p_j(t) = 1$. При этих условиях система (4.19) (или (4.20)) имеет единственное решение.

Пример 4.9. Показать, что для процесса Пуассона (как марковского процесса со счётным числом состояний) справедлива система уравнений Колмогорова.

Решение. Процесс Пуассона удовлетворяет условию (4.1), и переходная вероятность имеет вид

$$\pi_{ij}(t) = P(\xi(t+s) = j \mid P(\xi(s) = i) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-\lambda t}, \qquad j - i \geqslant 0;$$

а если $j - i < 0$, то $\pi_{ij}(t, t+u) = 0$. Отсюда

$$\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & j-i<0, \\ -\lambda e^{-\lambda t}, & j-i=0, \\ -\lambda \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i-1}}{(j-i-1)!} e^{-\lambda t}, & j-i>0, \end{cases} \tag{4.23}$$

следовательно,

$$\Lambda \overset{\text{def}}{=\!=} \left.\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0, & j-i<0, \\ -\lambda, & j-i=0, \\ \lambda, & j-i=1, \\ 0, & j-i>1. \end{cases}$$

Записав (4.23) как

$$\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & j<i, \\ -\lambda \pi_{ij}, & j=i, \\ -\lambda \pi_{ij} + \lambda \pi_{i+1,j}, & j>i, \end{cases}$$

видим, что уравнения Колмогорова $\dot{\pi}(t) = \Lambda \pi = \pi \Lambda$ в данном случае выполнены.

5. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В этой части мы будем рассматривать комплекснозначные случайные величины и комплекснозначные случайные процессы. Пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ есть случайная величина, т. е. $\xi(\omega) = \xi_{\mathrm{Re}}(\omega) + i\xi_{\mathrm{Im}}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, и ξ_{Re}, ξ_{Im} – действительнозначные случайные величины. Будем обозначать как $\overline{\xi}$ комплексно-сопряжённую случайную величину, $\overline{\xi(\omega)} = \xi_{\mathrm{Re}}(\omega) - i\xi_{\mathrm{Im}}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Нас не будет интересовать, как устроено совместное распределение действительной и мнимой частей, определим лишь два первых момента:

$$M\xi = M\xi_{\mathrm{Re}} + iM\xi_{\mathrm{Im}}, \quad \operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)\overline{(\eta - M\eta)}, \quad D\xi = \operatorname{cov}(\xi,\xi) = M|\xi - M\xi|^2.$$

Очевидно, что

$$M\bar{\xi} = \overline{M\xi}, \qquad \operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\xi\,\overline{\eta} - M\xi \cdot M\,\overline{\eta}, \qquad D\xi = M|\xi|^2 - |M\xi|^2.$$

Рассмотрим множество (пространство) случайных величин

$$\mathcal{H} = \{\xi\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon\ M\xi = 0,\ M|\xi|^2 < \infty\}.$$

Каждую такую случайную величину ξ будем называть *гильбертовой*. Заметим, что в этом пространстве коэффициент ковариации обладает свойствами (комплексного) скалярного произведения: для любых случайных величин $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta \in \mathcal{H}$

- $\operatorname{cov}(\eta,\xi) = \overline{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}$,
- $\operatorname{cov}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \eta) = a_1 \operatorname{cov}(\xi_1,\eta) + a_2 \operatorname{cov}(\xi_2,\eta)$ для любых $a_1 . a_2 \in \mathbb{C}$,
- $\operatorname{cov}(\xi,\xi) \geqslant 0$, причём $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(\xi = 0) = 1$.

Последнее утверждение вытекает из неравенства Чебышёва, $P(|\xi| \geqslant \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, если $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = D\xi = 0$.

Исходя из этих свойств коэффициента ковариации далее наряду с теоретико-вероятностными мы будем использовать стандартные обозначение линейной алгебры:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\xi\,\overline{\eta} = (\xi,\eta), \qquad \operatorname{cov}(\xi,\xi) = M|\xi|^2 = D\xi = (\xi,\xi) = \|\xi\|^2.$$

Из свойств скалярного произведения вытекает хорошо известное неравенство Коши–Буняковского:

$$|(\xi,\eta)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \cdot \|\eta\|^2, \qquad \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

Если случайные величины ξ, η таковы, что (ξ,η) – действительное число, доказательство этого неравенства стандартно: для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\xi - a\eta\|^2 = M(\xi - a\eta)\overline{(\xi - a\eta)} = M|\xi|^2 - aM\xi\,\overline{\eta} - aM\,\overline{\xi}\eta + a^2M|\eta|^2 = \\ = \|\xi\|^2 - a(\xi,\eta) - a\overline{(\xi,\eta)} + a^2\|\eta\|^2 = \|\xi\|^2 - 2a(\xi,\eta) + a^2\|\eta\|^2.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Поскольку $\|\xi - a\eta\|^2 \geqslant 0$, правая часть (5.1) как квадратный трёхчлен по a неотрицательна при любом $a \in \mathbb{R}$. Следовательно, дискриминант этого квадратного трёхчлена неположителен. Последнее условие и означает, что $(\xi,\eta)^2 \leqslant \|\xi\|^2 \cdot \|\eta\|^2$.

Если же (ξ,η) имеет мнимую часть, т. е. $(\xi,\eta) = re^{i\varphi}$, то, прежде чем писать соотношения (5.1), необходимо сделать линейное преобразование $\tilde{\xi} = e^{-i\varphi}\xi$. Тогда $|\tilde{\xi}|^2 = |\xi|^2$ и $(\tilde{\xi},\eta) = e^{-i\varphi}(\xi,\eta) = r = |(\xi,\eta)|$. При этом (5.1) принимает вид

$$\|\tilde{\xi} - a\eta\|^2 = \|\xi\|^2 - 2a|(\xi,\eta)| + a^2\|\eta\|^2.$$

Теперь мы можем применить те же рассуждения, что и выше, и получим неравенство $|(\xi,\eta)|^2 \leqslant \|\xi\|^2\cdot\|\eta\|^2$.

Отметим ещё одно полезное неравенство

$$\|\tilde{\xi}+\eta\|^2 \leqslant 2\|\xi\|^2+2\|\eta\|^2, \tag{5.2}$$

которое эквивалентно тривиальному неравенству $\|\tilde{\xi}-\eta\|^2 \geqslant 0$.

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ случайных величин из пространства $\mathcal{H}$ сходится в *среднем квадратичном* к случайной величине $\xi\in\mathcal{H}$ и писать $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \xi$, если

$$M|\xi_n-\xi|^2 = \|\xi_n-\xi\|^2 \to 0, \qquad n\to\infty.$$

Далее мы часто не будем задавать условие $n=\overline{1,\infty}$ в обозначениях последовательностей (и писать, например, $\{\xi_n\}$), а также не будем указывать, что предельный переход совершается при $n\to\infty$ (и писать просто $\xi_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi$), в тех случаях, когда это не может вызывать непонимания. Если случайные величины рассматриваются как элементы пространства $\mathcal{H}$, то сходимость понимается исключительно как сходимость по норме этого пространства.

Важнейшим свойством пространства $\mathcal{H}$ является его полнота. Имеет место следующая теорема, которую мы оставим без доказательства.

Теорема 5.1. *Последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин из пространства $\mathcal{H}$ сходится к случайной величине $\xi\in\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдётся натуральное число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $m,n>N$ имеет место неравенство $\|\xi_n-\xi_m\|<\epsilon$ (или, кратко, $\|\xi_n-\xi_m\|\to 0$ для всех $m,n\to\infty$).*

Докажем несколько простых утверждений о свойствах сходимости последовательностей из $\mathcal{H}$, которые часто будем использовать в дальнейшем.

Лемма 5.6. *Если $\|\xi_n-\xi\|^2\to 0$ при $n\to\infty$, то числовая последовательность квадратов норм $\{\|\xi_n\|^2\}$ ограничена.*

Доказательство. Числовая последовательность $\|x_n-x\|^2$, $n=1,2,\ldots$, сходится к нулю, следовательно, ограничена. В силу неравенства

$$\|x_n\|^2 = \|x_n-x+x\|^2 \leqslant 2\|x_n-x\|^2+2\|x\|^2,$$

аналогичного (5.2), ограничена и последовательность $\|x_n\|^2$, $n=1,2,\ldots$.

Лемма 5.7. *Если $\|\xi_n-\xi\|^2\to 0$ при $n\to\infty$, то $\|\xi_n\|^2\to\|\xi\|^2$ при $n\to\infty$.*

Доказательство. Поскольку, очевидно, $\|\xi_n-\xi\|^2=\|\xi_n\|^2-(\xi_n,\xi)-\overline{(\xi_n,\xi)}+\|\xi\|^2$ и $\|\xi\|^2=(\xi,\xi)=\overline{(\xi,\xi)}$, мы можем записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|^2-\|\xi\|^2 &= \|\xi_n-\xi\|^2-2\|\xi\|^2+(\xi_n,\xi)+\overline{(\xi_n,\xi)} =\\ &= \|\xi_n-\xi\|^2-(\xi,\xi)-\overline{(\xi,\xi)}+(\xi_n,\xi)+\overline{(\xi_n,\xi)} =\\ &= \|\xi_n-\xi\|^2+(\xi_n,\xi-\xi)+\overline{(\xi_n,\xi-\xi)}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\big|\,\|\xi_n\|^2-\|\xi\|^2\big| \leqslant \|\xi_n-\xi\|^2+2\big|(\xi_n,\xi-\xi)\big| \leqslant \|\xi_n-\xi\|^2+2\|\xi_n-\xi\|\cdot\|\xi\|.$$

Каждое слагаемое в правой части неравенства стремится к нуля, таким образом, $\|\xi_n\|^2 - \|\xi\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 5.8. *Если* $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $\|\tilde{\xi}_m - \xi\|^2 \to 0$ *при* $m \to \infty$, *то* $(\xi_n, \tilde{\xi}_m) \to (\xi, \xi)$ *при* $n, m \to \infty$.

Доказательство. Запишем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m) - (\xi, \xi)\big| &= \big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m) - (\xi_n, \xi) + (\xi_n, \xi) - (\xi, \xi)\big| = \\ &= \big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m - \xi) + (\xi_n - \xi, \xi)\big| \leqslant \big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m - \xi)\big| + \big|(\xi_n - \xi, \xi)\big| \leqslant \\ &\leqslant \|\xi_n\| \cdot \|\tilde{\xi}_m - \xi\| + \|\xi_n - \xi\| \cdot \|\xi\|.\end{aligned}$$

В силу условия $\|\xi_n - \xi\|^2 \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1 такой, что

$$\|\xi_n - \xi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|\xi\|} \quad \text{при} \quad n > N_1.$$

Далее, по лемме 5.6 найдётся $C > 0$ такое, что $\|\xi_n\| \leqslant C$ для всех n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_2 такой, что

$$\|\tilde{\xi}_m - \xi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{при} \quad m > N_2.$$

Объединяя полученные неравенства получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = \max(N_1, N_2)$ такой, что

$$\big|(\xi_n, \tilde{\xi}_m) - (\xi, \xi)\big| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N. \tag{5.3}$$

Лемма доказана.

Теперь докажем в некотором смысле обратное утверждение.

Лемма 5.9. *Если* $(\xi_n, \xi_m) \to A$ *при* $n, m \to \infty$, *где* A *– некоторое комплексное число, то последовательность* $\{\xi_n\}$ *имеет предел.*

Доказательство. Заменим в соотношении (5.3) (ξ, ξ) на A и положим $\tilde{\xi}_m = \xi_m$ для всех $m = 1, 2, \ldots$. Получим для любого $\varepsilon > 0$

$$\big|(\xi_n, \xi_m) - A\big| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N(\varepsilon).$$

Отсюда (при $m = n$) $\|\xi_n\|^2 \to A$ при $n \to \infty$ и видно, что число A с необходимостью действительное. Следовательно,

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|\xi_n\|^2 - (\xi_n, \xi_m) - \overline{(\xi_n, \xi_m)} + \|\xi_m\|^2 \to A - A - A + A = 0, \quad n, m \to \infty;$$

это означает, что последовательность $\{\xi_n\}$ фундаментальна, поэтому имеет предел. Лемма доказана.

Теперь мы обрели необходимый математический инструмент для исследования случайных процессов.

Рассмотрим комплекснозначный случайный процесс $\xi(t) = \xi_{\mathrm{Re}}(t) + i\xi_{\mathrm{Im}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Назовём такой процесс гильбертовым, если для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение $\xi(t) \in \mathcal{H}$, т. е. $M\xi(t) = 0$ и $M|\xi(t)|^2 < \infty$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Если использовать структуру пространства $\mathcal{H}$, то для ковариационной функции такого процесса мы можем записать

$$R(t, s) = \mathrm{cov}(\xi(t), \xi(s)) = M\xi(t)\overline{\xi(s)} = (\xi(t), \xi(s)), \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Далее, если иное не оговорено особо, мы рассматриваем гильбертовы случайные процессы.

Непрерывность в среднем квадратичном.

Определение 5.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *непрерывным в среднем квадратичном* (с.к.-непрерывным) в точке t, если $M|\xi(t+h)-\xi(t)|^2 \to 0$ при $h \to 0$, или, другими словами, для любой последовательности $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к нулю,

$$M|\xi(t+h_n)-\xi(t)|^2 = \|\xi(t+h_n)-\xi(t)\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.4}$$

Далее мы свяжем с.к.-непрерывность с непрерывностью функции $R(\,\cdot\,)$. Напомним, $R(\,\cdot\,)$ как функция двух действительных переменных непрерывна в точке (t,s), если

$$\big|R(t+h_n, s+\tilde{h}_m) - R(t,s)\big| \to 0 \quad \text{при} \quad h_n \to 0, \quad \tilde{h}_m \to 0$$

(здесь сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ произвольны).

Теорема 5.2. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда функция $R(\,\cdot\,)$ непрерывна в точке (t,t).*

Доказательство. Выберем произвольным образом сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ и положим $\xi_n = \xi(t+h_n)$, $\tilde{\xi}_m = \xi(t+\tilde{h}_m)$ и $\xi = \xi(t)$.

Если случайный процесс с.к.-непрерывен в точке t, то независимо от выбора последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ мы имеем $\|\xi_n-\xi\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|\tilde{\xi}_m-\xi\|^2 \to 0$ при $m \to \infty$. В силу леммы 5.8

$$R(t+h_n, t+\tilde{h}_m) = (\xi_n, \tilde{\xi}_m) \to (\xi, \xi) = R(t,s) \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Наоборот, если для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$

$$\big|R(t+h_n, t+\tilde{h}_m) - R(t,t)\big| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

то (при $\tilde{h}_m = h_m$ для всех m)

$$\|\xi_n\|^2 = (\xi_n, \xi_n) = R(t+h_n, t+h_n) \to R(t,t) = (\xi,\xi) = \|\xi\|^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а также (при $\tilde{h}_m = 0$ для всех m)

$$(\xi_n, \xi) = R(t+h_n, t) \to R(t,t) = \|\xi\|^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

Отсюда

$$\|\xi_n-\xi\|^2 = \|\xi_n\|^2 - (\xi_n,\xi) - \overline{(\xi_n,\xi)} + \|\xi\|^2 \to \|\xi\|^2 - \|\xi\|^2 - \|\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = 0,$$

другими словами, $M|\xi(t+h_n)-\xi(t)|^2 \to 0$ для любой сходящейся к нулю последовательности $\{h_n\}$.

Замечание 5.7. Если функция $R(\,\cdot\,)$ непрерывна в точках (t,t) и (s,s), то она непрерывна в точке (t,s). Чтобы это показать, выберем произвольные сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ и положим $\xi_n = \xi(t+h_n)$, $\tilde{\eta}_m = \xi(s+\tilde{h}_m)$ и $\xi = \xi(t)$, $\eta = \xi(s)$. Тогда $\|\xi_n-\xi\|^2 \to 0$ и $\|\tilde{\eta}_m-\eta\|^2 \to 0$, следовательно (см. аналогичные выкладки в доказательстве леммы 5.8),

$$\begin{aligned}\big|R(t+h_n, s+\tilde{h}_m) - R(t,s)\big| &= \big|(\xi_n, \tilde{\eta}_m) - (\xi,\eta)\big| \leqslant \\ &\leqslant \big|(\xi_n, \tilde{\eta}_m-\eta)\big| + \big|(\xi_n-\xi, \eta)\big| \leqslant \|\xi_n\| \cdot \|\tilde{\eta}_m-\eta\| + \|\xi_n-\xi\| \cdot \|\eta\| \to 0\end{aligned}$$

при $n, m \to \infty$.

Дифференцируемость в среднем квадратичном.

Определение 5.2. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *дифференцируемым в среднем квадратичном* (с.к.-дифференцируемым) в точке t, если существует случайная величина $\dot{\xi} = \dot{\xi}(t) \in \mathcal{H}$ такая, что

$$M\left|\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h} - \dot{\xi}(t)\right|^2 = \left\|\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h} - \dot{\xi}(t)\right\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{5.5}$$

или, другими словами, для любой последовательности $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к нулю, последовательность $\frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в среднем квадратичном смысле к некоторой случайной величине.

Далее мы свяжем с.к.-дифференцируемость с дифференцируемостью функции $R(\,\cdot\,)$, точнее, с существованием её второй смешанной производной, которую мы определим так. Введём разностное отношение для $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\,\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(t,s)}{\partial t} &\approx \frac{R(t+h,s)-R(t,s)}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial R(t,s)}{\partial t} &\approx \frac{\partial R(t,s+\tilde{h})/\partial t - \partial R(t,s)/\partial t}{\tilde{h}} = \\ &= \frac{R(t+h,s+\tilde{h}) - R(t,s+\tilde{h}) - R(t+h,s) + R(t,s)}{h\tilde{h}}. \end{aligned}$$

Будем говорить, что $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную[3)] в точке (t,s), если для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ существует

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{R(t+h_n,s+\tilde{h}_m) - R(t,s+\tilde{h}_m) - R(t+h_n,s) + R(t,s)}{h_n\tilde{h}_m} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\,\partial t}. \tag{5.6}$$

Теорема 5.3. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда функция $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную в точке (t,t).*

Доказательство. Выберем произвольные сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ и положим, как и выше, $\xi_n = \xi(t+h_n)$, $\tilde{\xi}_m = \xi(t+\tilde{h}_m)$ и $\xi = \xi(t)$. Кроме того, введём для краткости обозначения

$$\begin{gathered} D^{(2)}_{n,m}(t,t) = \frac{R(t+h_n,t+\tilde{h}_m) - R(t,t+\tilde{h}_m) - R(t+h_n,t) + R(t,t)}{h_n\tilde{h}_m}, \\ \mathcal{D}_n = \frac{\xi(t+h_n)-\xi(t)}{h_n}, \qquad \widetilde{\mathcal{D}}_m = \frac{\xi(t+\tilde{h}_m)-\xi(t)}{\tilde{h}_m}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

В этих обозначениях

$$D^{(2)}_{n,m}(t,t) = \frac{(\xi_n,\tilde{\xi}_m) - (\xi,\tilde{\xi}_m) - (\xi_n,\xi) + (\xi,\xi)}{h_n\tilde{h}_m} =$$

---

3) Заметим, что это определение несколько отличается от определения в математическом анализе, в частности, из нашего определения непосредственно вытекает, что если существует одна из смешанных производных, то существует и другая, причём обе производные, конечно, совпадают.

$$= \frac{(\xi_n - \xi, \tilde{\xi}_m) - (\xi_n - \xi, \xi)}{h_n \tilde{h}_m} = \left(\frac{\xi_n - \xi}{h_n}, \frac{\tilde{\xi}_m - \xi}{\tilde{h}_m} \right) = (\mathcal{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_m) \tag{5.8}$$

и

$$M\left| \frac{\xi(t+h_n) - \xi(t)}{h_n} - \dot{\xi}(t) \right|^2 = \|\mathcal{D}_n - \dot{\xi}\|^2, \qquad \dot{\xi} = \dot{\xi}(t).$$

Таким образом, если $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-дифференцируем в точке t, то для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$ мы имеем сходимости

$$\|\mathcal{D}_n - \dot{\xi}\|^2 \to 0, \qquad \|\widetilde{\mathcal{D}}_m - \dot{\xi}\|^2 \to 0.$$

В силу леммы 5.8 с учётом выражения для $D^{(2)}_{n,m}(t,t)$ в (5.7) отсюда следует, что

$$D^{(2)}_{n,m}(t,t) = (\mathcal{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_m) \to (\dot{\xi}, \dot{\xi}) \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

таким образом, существует

$$\frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\, \partial t} = (\dot{\xi}, \dot{\xi}) = M\dot{\xi}(t)\overline{\dot{\xi}(t)}. \tag{5.9}$$

Наоборот, если для любых сходящихся к нулю последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$

$$D^{(2)}_{n,m}(t,t) = (\mathcal{D}_n, \widetilde{\mathcal{D}}_m) \to \frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\, \partial t} \quad \text{при} \quad n, m \to \infty, \tag{5.10}$$

то (при $\tilde{h}_m = h_m$ для всех m) мы получаем

$$\|\mathcal{D}_n\|^2 = (\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_n) \to \frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\, \partial t} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.11}$$

При этом

$$\|\mathcal{D}_n - \mathcal{D}_m\|^2 = \|\mathcal{D}_n\|^2 - (\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_m) - \overline{(\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_m)} + \|\mathcal{D}_m\|^2. \tag{5.12}$$

Видно, что каждое слагаемое в правой части этого равенства при $n, m \to \infty$ стремится к $\frac{\partial^2 R(t,t)}{\partial s\, \partial t}$ (эта величина действительна в силу (5.11)). Поэтому последовательность $\{\mathcal{D}_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел. Осталось показать, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\mathcal{D}_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$.

Выберем две сходящиеся к нулю последовательности $\{h_n\}$ и $\{\tilde{h}_m\}$. Тогда на основании проведённых выше рассуждений мы можем заключить, что существуют некоторые случайные величины $\dot{\xi}, \dot{\tilde{\xi}} \in \mathcal{H}$ такие, что $\mathcal{D}_n \to \dot{\xi}$ при $n \to \infty$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_m \to \dot{\tilde{\xi}}$ при $m \to \infty$. При этом в силу соотношений, полностью аналогичных (5.12) (с заменой $\mathcal{D}_m$ на $\widetilde{\mathcal{D}}_m$), и с учётом (5.10) получаем, что

$$\|\mathcal{D}_n - \widetilde{\mathcal{D}}_m\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Отсюда

$$\|\dot{\xi} - \dot{\tilde{\xi}}\|^2 \leqslant 2\|\dot{\xi} - \mathcal{D}_n\|^2 + 2\|\mathcal{D}_n - \widetilde{\mathcal{D}}_m\|^2 + 2\|\widetilde{\mathcal{D}}_m - \dot{\tilde{\xi}}\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

а это возможно, если и только если $\|\dot{\xi} - \dot{\tilde{\xi}}\|^2 = 0$, т. е. $\dot{\xi} = \dot{\tilde{\xi}}$ с вероятностью единица.

Замечание 5.8. Можно показать, что если функция $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную в точках (t,t) и (s,s), то она имеет вторую смешанную производную в точке (t,s). Для этого достаточно доказать фундаментальность двухиндексной числовой последовательности

$$D^{(2)}_{n,m}(t,s) = \frac{R(t+h_n, s+\tilde{h}_m) - R(t, s+\tilde{h}_m) - R(t+h_n, s) + R(t,s)}{h_n \tilde{h}_m}, \ n,m = 1,2,\ldots,$$

при $h_n \to 0$, $\tilde{h}_m \to 0$. Формулы, которые при этом используются, хотя и несложные, но достаточно громоздкие, поэтому мы не будем приводить доказательство сделанного утверждения.

Интегрируемость в среднем квадратичном. Рассмотрим проблему интегрируемости случайного процесса на отрезке $[a,b]$. Для построения интегральных сумм рассмотрим два набора выборочных точек $t_0, t_1, \ldots, t_n$ и точек разбиения $t_0^*, t_1^*, \ldots, t_n^*$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{gathered} a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \\ t_{k-1} \leqslant t_k^* \leqslant t_k, \qquad k = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{5.13}$$

где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Введём обозначения $\mathcal{T}_n = \big(\{t_k\}_{k=\overline{0,n}}, \{t_k^*\}_{k=\overline{1,n}}\big)$ и $\mathcal{S}_m = \big(\{s_j\}_{j=\overline{1,m}}, \{s_j^*\}_{j=\overline{1,m}}\big)$, считая, что участвующие в $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{S}_m$ выборочные точки и точки разбиения всегда удовлетворяют условиям (5.13) (разумеется, с заменой t на s и n на m для $\mathcal{S}_m$).

Будем говорить, что функция $R(\,\cdot\,)$ интегрируема в квадрате $[a,b] \times [a,b]$, если для любых $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{S}_m$, удовлетворяющих условиям (5.13),

$$I_{n,m} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} R(t_k^*, s_j^*) \Delta t_k \Delta s_j \underset{n,m' \to \infty}{\longrightarrow} I \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b \int_a^b R(t,s)\,dt\,ds. \tag{5.14}$$

Определение 5.3. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *интегрируемым в среднем квадратичном* (с.к.-интегрируемым) на отрезке $[a,b]$, если существует случайная величина $\Upsilon \in \mathcal{H}$ такая, что для любого разбиения $\mathcal{T}_n$, удовлетворяющего условиям (5.13),

$$M\left|\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)\Delta t_k - \Upsilon\right|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)\Delta t_k - \Upsilon\right\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.15}$$

Теорема 5.4. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-интегрируем на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция $R(\,\cdot\,)$ интегрируема в квадрате $[a,b] \times [a,b]$.*

Доказательство. Выберем произвольно два разбиения $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{S}_m$ отрезка $[a,b]$, удовлетворяющих условиям (5.13), и положим $\xi(t_k^*) = \xi_k^*$ и $\tilde{\xi}(s_j^*) = \tilde{\xi}_j^*$, а также введем обозначения

$$\Upsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \Delta t_k, \qquad \widetilde{\Upsilon}_m = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\xi}_j^* \Delta s_j.$$

В этих обозначениях

$$I_{n,m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R(t_k^*, s_j^*)\Delta t_k \Delta s_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M\xi(t_k^*)\overline{\xi(s_j^*)}\Delta t_k \Delta s_j =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\xi_k^*, \tilde{\xi}_j^*)\Delta t_k \Delta s_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \Delta t_k, \sum_{j=1}^{m} \tilde{\xi}_j^* \Delta s_j \right) = (\Upsilon_n, \widetilde{\Upsilon}_m).$$

При этом условие с.к.-интегрируемости процесса $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, записывается как

$$M|\Upsilon_n - \Upsilon|^2 = \|\Upsilon_n - \Upsilon\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

причём независимо от выбора разбиения $\mathcal{T}_n$. Другими словами, если процесс с.к.-интегрируем, то $\Upsilon_n \to \Upsilon$ и $\widetilde{\Upsilon}_m \to \Upsilon$ для любых $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{S}_m$, удовлетворяющих условиям (5.13).

Дальнейшие рассуждения с точностью до замены обозначений повторяют доказательство предыдущей теоремы.

Видно, что по лемме 5.8 с.к.-интегрируемость процесса $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, влечёт сходимость $I_{n,m} \to (\Upsilon, \Upsilon)$ при $n, m \to \infty$. Таким образом, существует

$$\int_a^b \int_a^b R(t,s)\,dt\,ds = (\Upsilon, \Upsilon).$$

Наоборот, если для любых двух разбиений $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{S}_m$ отрезка $[a,b]$, удовлетворяющих условиям (5.13), $I_{n,m} = (\Upsilon_n, \widetilde{\Upsilon}_m) \to I$ при $n, m \to \infty$, то (при $\mathcal{S}_n \equiv \mathcal{T}_n$) мы получаем

$$I_{n,n} = (\Upsilon_n, \Upsilon_m) = \|\Upsilon_n\|^2 \to I \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда

$$\|\Upsilon_n - \Upsilon_m\|^2 = \|\Upsilon_n\|^2 - (\Upsilon_n, \Upsilon_m) - \overline{(\Upsilon_n, \Upsilon_m)} + \|\Upsilon_m\|^2 \underset{n,m'\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.16}$$

Таким образом, последовательность $\{\Upsilon_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел. Осталось показать, что этот предел не зависит от выбора разбиения $\mathcal{T}_n$.

Выберем какие-либо два разбиения $\mathcal{T}_n$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_m$ отрезка $[a,b]$, удовлетворяющих условиям (5.13). Тогда соответствующие им интегральные суммы Υ_n и $\widetilde{\Upsilon}_n$ из (5.15) удовлетворяют условиям $\Upsilon_n \to \Upsilon$ при $n \to \infty$ и $\widetilde{\Upsilon}_m \to \widetilde{\Upsilon}$ при $m \to \infty$. При этом в силу соотношений, полностью аналогичных (5.16) (с заменой Υ_m на $\widetilde{\Upsilon}_m$) получаем, что

$$\|\Upsilon_n - \widetilde{\Upsilon}_m\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Отсюда

$$\|\Upsilon - \widetilde{\Upsilon}\|^2 \leqslant 2\|\Upsilon - \Upsilon_n\|^2 + 2\|\Upsilon_n - \widetilde{\Upsilon}_m\|^2 + 2\|\widetilde{\Upsilon}_m - \widetilde{\Upsilon}\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

а это возможно, если и только если $\|\Upsilon - \widetilde{\Upsilon}\|^2 = 0$, т. е. $\Upsilon = \widetilde{\Upsilon}$ с вероятностью единица.

Случай ненулевого математического ожидания случайного процесса. Обобщим полученные теоремы на случай, когда $M\xi(t) = \mu(t) \not\equiv 0$, сохранив условие $M|\xi(t) - \mu(t)|^2 < \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Положим $\xi^\circ(t) = \xi(t) - \mu(t)$, тогда $\xi^\circ(t) \in \mathcal{H}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и, очевидно,

$$R(t,s) = \operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s)) = M\xi^\circ(t)\overline{\xi^\circ(s)} = (\xi^\circ(t), \xi^\circ(s)) = \operatorname{cov}(\xi^\circ(t), \xi^\circ(s)) = R^\circ(t,s),$$

где $R^\circ(\,\cdot\,)$ – ковариационная функция процесса $\xi^\circ(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Новые теоремы достаточно просто получаются из предыдущих, если принять во внимание следующие два замечания.

Замечание 5.9. Пусть последовательность $\{\xi_n^\circ\} \subset \mathcal{H}$ (в частности, $M\xi^\circ = 0$ для всех n), а $\{\mu_n\}$ – произвольная неслучайная последовательность комплексных чисел. Тогда

$$M|\xi_n^\circ + \mu_n|^2 = M|\xi_n^\circ|^2 + \mu_n \cdot M\xi_n^\circ + \overline{\mu_n \cdot M\xi_n^\circ} + |\mu_n|^2 = M|\xi_n^\circ|^2 + |\mu_n|^2,$$

отсюда $M|\xi_n^\circ + \mu_n|^2 \to 0$ если и только если $\xi_n^\circ \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$ и $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание 5.10. Для любой случайной величины α место тривиальная цепочка неравенств

$$|M\alpha| \leqslant M|\alpha| \leqslant \sqrt{M|\alpha|^2}, \tag{5.17}$$

где последнее эквивалентно тривиальному неравенству $D|\alpha| = M|\alpha|^2 - (M|\alpha|)^2 \geqslant 0$. На основании (5.17) мы можем утверждать, что если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \xi$, то

$$|M\xi_n - M\xi| = |M(\xi_n - \xi)| \leqslant \sqrt{M|\xi_n - \xi|^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

другими словами, $M\xi_n \to M\xi$. Кроме того, из (5.17) вытекает, что если $M|\xi|^2 < \infty$, то $M\xi$ тоже существует и $|M\xi|^2 \leqslant M|\xi|^2$.

Исследуем с.к.-непрерывность случайного процесса. В силу сделанного выше замечания мы можем переписать приращение в (5.4) как

$$\begin{aligned} M|\xi(t+h_n) - \xi(t)|^2 &= M|\xi^\circ(t+h_n) - \xi^\circ(t) + (\mu(t+h_n) - \mu(t)|^2 = \\ &= M|\xi^\circ(t+h_n) - \xi^\circ(t)|^2 + |\mu(t+h_n) - \mu(t)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда $\xi(t+h_n) \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi(t)$ тогда и только тогда, когда выполнются два условия:

- $\xi(t+h_n^\circ) \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi^\circ(t)$,
- $\mu(t+h_n) \to \mu(t)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, в силу совпадения ковариационных функций $R(\,\cdot\,)$ и $R^\circ(\,\cdot\,)$ мы получаем обобщение доказанной теоремы 5.2.

Теорема 5.5. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с ненулевым математическим ожиданием $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: функция $R(\,\cdot\,)$ непрерывна в точке (t,t) и функция $\mu(\,\cdot\,)$ непрерывна в точке t.*

Для с.к.-дифференцируемости рассуждения аналогичны, но немного сложнее. Введём дифференциальные отношения

$$\mathcal{D}_n = \frac{\xi(t+h_n) - \xi(t)}{h_n}, \qquad \mathcal{D}_n^\circ = \frac{\xi^\circ(t+h_n) - \xi^\circ(t)}{h_n}, \qquad DM_n = \frac{\mu(t+h_n) - \mu(t)}{h_n}.$$

Тогда $\mathcal{D}_n - \mathcal{D}_m = \mathcal{D}_n^\circ - \mathcal{D}_m^\circ + DM_n - DM_m$ и

$$M|\mathcal{D}_n - \mathcal{D}_m|^2 = M|\mathcal{D}_n^\circ - \mathcal{D}_m^\circ|^2 + |DM_n - DM_m|^2.$$

В результате последовательность $\{\mathcal{D}_n\}$ с.к.-фундаментальна (или, что эквивалентно, сходится) тогда и только тогда, когда выполнены оба условия: последовательность $\{\mathcal{D}_n^\circ\}$ с.к.-фундаментальна (сходится) и числовая последовательность $\{\mu_n\}$ фундаментальна (сходится). Таким образом мы получаем обобщение доказанной теоремы 5.3.

Теорема 5.6. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с ненулевым математическим ожиданием $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-непрерывен в точке t тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: функция $R(\,\cdot\,)$ имеет вторую смешанную производную в точке (t,t) и функция $\mu(\,\cdot\,)$ дифференцируема в точке t.*

При этом операции взятия с.к.-производной и вычисления математического ожидания можно менять местами:

$$M\dot{\xi}(t) = \frac{d}{dt} M\xi(t).$$

Действительно, если $\mathcal{D}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \dot{\xi}$ при $h_n \to 0$, то в силу замечания 5.10 $M\mathcal{D}_n \to M\dot{\xi}$, следовательно,

$$M\dot{\xi}(t) = \lim_{n\to\infty} M\mathcal{D}_n = \lim_{n\to\infty} M\frac{\xi(t+h_n) - \xi(t)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(t+h_n) - \mu(t)}{h_n} = \dot{\mu}(t). \quad (5.18)$$

Обобщение теоремы 5.4 о с.к.-интегрируемости получается совершенно аналогично теореме о с.к.-дифференцируемости. Нужно только заменить дифференциальные отношения на интегральные суммы Дарбу:

$$\Upsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_k^*)\Delta t_k, \qquad \Upsilon_n^\circ = \sum_{k=1}^{n} \xi^\circ(t_k^*)\Delta t_k, \qquad IM_n = \sum_{k=1}^{n} \mu(t_k^*)\Delta t_k.$$

Тогда $\Upsilon_n - \Upsilon_m = \Upsilon_n^\circ - \Upsilon_m^\circ + IM_n - IM_m$, и далее мы аналогично предыдущим рассуждениям получаем теорему.

Теорема 5.7. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с ненулевым математическим ожиданием $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с.к.-интегрируем на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: функция $R(\,\cdot\,)$ интегрируема в квадрате $[a,b] \times [a,b]$ и функция $\mu(\,\cdot\,)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

Аналогично (5.18) мы получаем, что

$$M\int_a^b \xi(t)\,dt = \int_a^b M\xi(t)\,dt.$$

6. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕРА И ИНТЕГРАЛ ПО ЭТОЙ МЕРЕ

Пусть на числовой прямой выбран и фиксирован конечный интервал $[a, b)$ ненулевой длины. Рассмотрим семейство $\mathbb{D}$ всевозможных интервалов $\Delta x = [x_1, x_2) \subset [a, b)$ и отвечающее ему семейство случайных величин

$$Z(\Delta x) \colon \Omega \to \mathbb{C}, \qquad \Delta x \in \mathbb{D},$$

т. е. в сущности некий специфический (по своему аргументу) случайный процесс.

Определение 6.1. Семейство случайных величин $Z(\Delta x)$, $\Delta x \in \mathbb{D}$, назовём *ортогональной стохастической мерой*, если оно удовлетворяет следующим условиям.

• Существуют моменты первого и второго порядка

$$MZ(\Delta x) = 0, \qquad D(\Delta x) = M|Z(\Delta x)|^2 < \infty, \tag{6.1}$$

другими словами, $Z(\Delta x) \in \mathcal{H}$ (гильбертова случайная величина). Назовём функцию

$$m(\,\cdot\,) \colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+, \qquad m(\Delta x) = M|Z(\Delta x)|^2, \tag{6.2}$$

структурной функцией.

• Если $\Delta x_1 \cap \Delta x_2 = \varnothing$, то

$$\operatorname{cov}(Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2)) = MZ(\Delta x_1)\overline{Z(\Delta x_2)} = 0, \tag{6.3}$$

последнее равенство можно записать как $(Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2) = 0$, что объясняет слово «ортогональная» в названии меры.

• Если интервал Δx представи́м как объединение двух непересекающихся[4)] интервалов, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$, то с вероятностью единица

$$Z(\Delta x) = Z(\Delta x_1) + Z(\Delta x_2) \tag{6.4}$$

(аддитивность с вероятностью единица);

• если интервал Δx представи́м как объединение счётного числа непересекающихся интервалов, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots$, то $M|Z(\Delta x)|^2 < \infty$ и в среднем квадратичном

$$Z(\Delta x) = Z(\Delta x_1) + Z(\Delta x_2) + \cdots,$$

другими словами,

$$M\left|Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k\right) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta x_k)\right|^2 = \left\|Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k\right) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta x_k)\right\|^2 \to 0, \qquad n \to \infty \tag{6.5}$$

(счётная аддитивность в среднем квадратичном смысле);

Введённая стохастическая мера не является неотрицательной, более того, её значения комплексны. Привычным свойствам меры удовлетворяет спектральная функция $m(\,\cdot\,)$, заданная в (6.2).

[4)] Отсутствие пересечения мы, как обычно в теории вероятностей, подчёркиваем, применяя знак плюс вместо знака объединения множеств.

Из сформулированных выше свойств (6.4) и (6.3) вытекает, что структурная функция обладает свойством аддитивности: если $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$ для непересекающихся интервалов Δx_1 и Δx_2, то мы имеем

$$\begin{aligned}
m(\Delta x) &= M|Z(\Delta x)|^2 = \|Z(\Delta x_1 + \Delta x_2)\|^2 = \|Z(\Delta x_1) + Z(\Delta x_2)\|^2 = \\
&= \|Z(\Delta x_1)\|^2 + (Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2)) + \overline{(Z(\Delta x_1), Z(\Delta x_2))} + \|Z(\Delta x_2)\|^2 = \\
&= \|Z(\Delta x_1)\|^2 + \|Z(\Delta x_2)\|^2 = M|Z(\Delta x_1)|^2 + M|Z(\Delta x_2)|^2 = m(\Delta x_1) + m(\Delta x_2).
\end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует аддитивность меры для $\Delta x = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_n$ при любом конечном числе попарно не пересекающихся интервалов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$:

$$m(\Delta x) = M\left|Z\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k\right)\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} M|Z(\Delta x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} m(\Delta x_k). \qquad (6.6)$$

Опираясь на требование (6.5), получим счётную аддитивность функции $m(\,\cdot\,)$. Пусть $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots$. Введём для краткости следующие обозначения для случайных величин:

$$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} Z(\Delta x) = Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k\right), \qquad \zeta_n \overset{\text{def}}{=\!=} Z\left(\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta x_k). \qquad (6.7)$$

Тогда по определению структурной функции

$$M|\zeta|^2 = m(\Delta x), \qquad M|\zeta_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} M|Z(\Delta x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} m(\Delta x_k).$$

Условие (6.5) в этих обозначениях записывается как

$$M|\zeta - \zeta_n|^2 = \|\zeta - \zeta_n\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В предыдущем разделе мы покзали, что такая сходимость влечёт $\|\zeta\| \to \|\zeta_n\|$ или, что эквивалентно, $M|\zeta_n|^2 \to M|\zeta|^2$ при $n \to \infty$. В терминах структурной функции это означает, что

$$m(\Delta x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(\Delta x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta x_k).$$

Таким образом, спектральная функция $m(\,\cdot\,)$, заданная на множестве всех конечных подынтервалов интервала $[a, b)$, обладает свойствами счётно-аддитвной меры, которые аналогичны свойствам длины или вероятности. В этом случае можно доопределить функцию $m(\,\cdot\,)$ на все подмножества интервала $[a, b)$, которые представимы как конечные или счётные объединения непересекающихся интервалов $\Delta x \in \mathbb{D}$. В результате получим, что $m(\,\cdot\,)$ – счётно-аддитивная мера на сигма-алгебре борелевских подмножеств интервала $[a, b)$.

Интеграл по случайной мере. Пусть задана спектральная мера $Z(|\Delta x)$ со структурной функцией $m(\Delta x)$, $m(\Delta x) \subset [a, b)$. Введём линейное пространство $\mathcal{L}^2$ функций, действующих из $[a, b)$ в $\mathbb{C}$, и зададим в нём скалярное произведение и норму равенствами

$$(g_1, g_2) = \int_a^b g_1(x)\overline{g_2(x)}\, dF(x), \qquad \|g\|^2 = \int_a^b |g(x)|^2\, dF(x),$$

где $F(\cdot)$ – некоторая действительнозначная неотрицательная (в нашем курсе кусочно-непрерывная) неубывающая функция, от которой мы потребуем выполнения следующего условия для любого $\Delta x = [x_1, x_2) \subset [a, b)$

$$m(\Delta x) = \int_{\Delta x} dF(x) = F(x_2) - F(x_1). \tag{6.8}$$

Интегралы в этих равенствах полностью аналогичны интегралу, определяющему математическое ожидание (интеграл Лебега–Стилтьеса).

Заметим, что мы не помечаем скалярное произведение и норму никакими значками, по которым их можно отличить от скалярного произведения в $\mathcal{H}$. Предполагается, что природа элементов, для которых вычисляются скалярные произведения или нормы, должна подсказать, в каком пространстве мы работаем.

Имеет место следующая теорема о полноте пространства $\mathcal{L}^2$, которую, как и теорему для пространства $\mathcal{H}$, мы оставим без доказательства.

Теорема 6.1. *Последовательность $\{g_n\}$ функций из пространства $\mathcal{L}^2$ сходится к функции $g \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $m, n > N$ имеет место неравенство $\|g_n - g_m\| < \epsilon$ (или, кратко, $\|g_n - g_m\| \to 0$ для всех $m, n \to \infty$).*

Построение интеграла начнём, как обычно, с интеграла от простых функций. Рассмотрим разбиение интервала $[a, b)$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и функцию $g(\cdot)\colon [a, b) \to \mathbb{C}$, кусочно-постоянную на интервалах $\Delta x_k = [x_{k-1}, x_k)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, \chi_k(x), \qquad \chi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta x_k, \\ 0, & x \notin \Delta x_k. \end{cases}$$

Для такой функции положим по определению

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)\, Z_\xi(dx) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, Z_\xi(\Delta x_k).$$

Очевидно, что $M\mathcal{I} = 0$ в силу $MZ_\xi(\Delta x_k) = 0$.

Отметим, что кусочно-постоянные функции образуют в $\mathcal{L}^2$ линейное многообразие, т. е. линейная комбинация двух кусочно-постоянных функций также является кусочно-постоянной на более мелких интервалах разбиения. Для интервалов постоянства линейной комбинации $ag(x)+bh(x)$ множество точек разбиения представляет собой объединение точек разбиения для каждого из двух слагаемых $g(x)$ и $h(x)$.

Лемма 6.10. *Пусть*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, \chi_k(x), \qquad \mathcal{I} = \sum_{k=1}^{n} g_k\, Z_\xi(\Delta x_k).$$

Тогда при выполнении равенства (6.8)

$$\|\mathcal{I}\|^2 = \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x), \tag{6.9}$$

где нормы случайной величины $\mathcal{I}$ и функции g определены соответственно в пространствах $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{H}$.

Доказательство. Вычислим указанные нормы. Имеем

$$\|\mathcal{I}\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} M|\mathcal{I}|^2 = M\left|\sum_{k=1}^n g_k Z_\xi(\Delta x_k)\right|^2 = \left\|\sum_{k=1}^n g_k Z_\xi(\Delta x_k)\right\|^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^n |g_k|^2 \|Z_\xi(\Delta x_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n |g_k|^2 \cdot M|Z_\xi(\Delta x_k)|^2 = \sum_{k=1}^n |g_k|^2 m(\Delta x_k),$$

где мы воспользовались ортогональностью меры. Учтём формулу (6.8), получим

$$\|\mathcal{I}\|^2 = \sum_{k=1}^n |g_k|^2 m(\Delta x_k) = \sum_{k=1}^n |g_k|^2 \int_{\Delta x_k} dF_\xi(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x). \tag{6.10}$$

С другой стороны,

$$\|g\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |g(x)|^2\, dF_\xi(x) = \int_a^b \left|\sum_{k=1}^n g_k \chi_k(x)\right|^2 dF_\xi(x) =$$
$$= \sum_{k,\tilde{k}=1}^n \int_a^b g_k \bar{g}_{\tilde{k}}\, \chi_k(x)\overline{\chi_{\tilde{k}}(x)}\, dF_\xi(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^b |g_k|^2 \chi_k(x)\, dF_\xi(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^n \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x), \tag{6.11}$$

где мы учли, что $\tilde{\chi}_k(x)\overline{\tilde{\chi}_{\tilde{k}}(x)} \equiv 0$ при $k \neq \tilde{k}$, а при $k = \tilde{k}$

$$\int_a^b |g_k|^2 |\chi_k(x)|^2\, dF_\xi(x) = \int_a^b |g_k|^2 \chi_k(x)\, dF_\xi(x) = \int_{\Delta x_k} |g_k|^2\, dF_\xi(x).$$

Сравнивая правые части равенств (6.10) и (6.11), получаем (6.9). Лемма доказана.

Перейдём к построению интеграла от функции более общего вида. Пусть функция $g(\,\cdot\,)\colon [a,b) \to \mathbb{C}$ представима как предел по норме пространства $\mathcal{L}^2$,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x), \tag{6.12}$$

где функции $g_n(\,\cdot\,)$, $n = 1, 2, \ldots$, кусочно-постоянные. Тогда $\|g_n - g_m\|^2 \to 0$ при $n, m \to \infty$. Поскольку функция $g_n - g_m$ кусочно-постоянная, к ней мы можем применить лемму 6.9: если $\mathcal{I}_n = \int_a^b g_n(x)\, Z_\xi(dx)$, то

$$\|\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_m\|^2 = \|g_n - g_m\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty$$

(заметим, что здесь первая норма задана в пространстве $\mathcal{H}$, а вторая – в пространстве $\mathcal{L}^2$). Из полноты пространства $\mathcal{H}$ вытекает что существует случайная величина $\mathcal{I}$, которую естественно назвать интегралом от функции $g(\,\cdot\,)$ по стохастической мере:

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)\, Z_\xi(dx) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, Z_\xi(dx) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n. \tag{6.13}$$

Для аккуратного завершения построения интеграла по случайной мере следует доказать, что предел в (6.13) не зависит от представления функции $g(\cdot)$ в виде предела кусочно-постоянных функций. Это вытекает из следующих простейших рассуждений. Пусть

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n,$$

другими словами, $\|g - g_n\| \to 0$ и $\|g - \tilde{g}_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, как показано выше, при $n \to \infty$ имеют место сходимости в пространстве $\mathcal{H}$

$$\mathcal{I}_n = \int_a^b g_n(x)\, Z_\xi(dx) \to \mathcal{I}, \qquad \tilde{\mathcal{I}}_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b \tilde{g}_n(x)\, Z_\xi(dx) \to \tilde{\mathcal{I}},$$

где $\mathcal{I}$ и $\tilde{\mathcal{I}}$ – некоторые случайные величины.

Заметим, что

$$\|g_n - \tilde{g}_n\|^2 \leqslant 2\|g_n - g\|^2 + 2\|g - \tilde{g}_n\|^2 \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{6.14}$$

При этом функция $g_n - \tilde{g}_n$ кусочно-постоянная, поэтому $\|\mathcal{I}_n - \tilde{\mathcal{I}}_n\| = \|g_n - \tilde{g}_n\|$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 &\leqslant 2\|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n\|^2 + 2\|\mathcal{I}_n - \tilde{\mathcal{I}}_n\|^2 + 2\|\tilde{\mathcal{I}}_n - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 = \\ &= 2|\mathcal{I} - \mathcal{I}_n\|^2 + 2\|g_n - \tilde{g}_n\|^2 + 2\|\tilde{\mathcal{I}}_n - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Это возможно, только если $\|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}\|^2 = 0$. В силу неравенства Чебышёва

$$P(|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}| > \varepsilon) \leqslant \frac{M|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}|^2}{\varepsilon^2} = \frac{\|\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}}\|^2}{\varepsilon^2} = 0,$$

для любого $\varepsilon > 0$, тем самым $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$ с вероятностью единица.