3. СХОДИМОСТЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ЕДИНИЦА

Прежде чем доказывать утверждения, связанные со сходимостью с вероятностью единица, докажем две леммы общего характера.

Лемма 3.1. *Для любого счётного набора событий* $A_1, A_2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \qquad n \leqslant \infty \tag{3.1}$$

(*здесь речь идёт о конечном или счётном объединении событий*).

Доказательство. Возьмём сначала $n = 2$, имеем

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2),$$

отсюда для $n = 3$ в силу ассоциативности операции объединения

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \leqslant P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Продолжая подобные рассуждения, получим неравенство (3.1) для любого конечного n. Для $n = \infty$ воспользуемся предельным переходом. Очевидно, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

причём в силу $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$ мы имеем монотонность ($B_n \subset B_{n+1}$) последовательности $B_1, B_2, \ldots$. Таким образом, по теореме о непрерывности вероятности и вследствие неравенства (3.1), уже доказанного для конечного n, получаем неравенство для $n = \infty$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\big(\lim_{n\to\infty} B_n\big) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Заметим, что ряд в правой части неравенства не обязан сходиться и может (формально) быть равен бесконечности. На этом доказательство леммы завершается.

Аналогичные рассуждения доказывают следующую лемму.

Лемма 3.2. *Для любого счётного набора событий* $A_1, A_2, \ldots$ *равенство*

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1 \tag{3.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $P(A_n) = 1$ *для каждого* $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Из очевидных соотношений

$$1 = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant P(A_n) \leqslant 1,$$

получаем, что (3.2) влечёт $P(A_n) = 1$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Наоборот, если $P(A_1) = P(A_2) = 1$, то $P(A_1 \cup A_2) \geqslant P(A_k)$ для $k = 1, 2$, следовательно, $P(A_1 \cup A_2) = 1$, откуда

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Аналогично, если $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1$, то

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_2) \cup A_3) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Продолжая подобные рассуждения, получаем, что если $P(A_k) = 1$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$, то для любого конечного n

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(C_n) = 1, \qquad C_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{n} A_k. \tag{3.3}$$

Для $n = \infty$, как и выше, воспользуемся предельным переходом. Используя равенства

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_n,$$

(предельный переход справедлив в силу включения $C_{n+1} = C_n \cap A_{n+1} \subset C_n$), выше доказанное равенство (3.3) и непрерывность вероятности, имеем

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = P(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = 1.$$

Лемма доказана.

Посмотрим, что вытекает из сходимости ряда в правой части (3.1) при $n = \infty$. Сначала вспомним понятия верхнего и нижнего пределов последовательности множеств:

$$\begin{aligned} A^* &= \limsup_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ A_* &= \liminf_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где предельные соотношения вытекают из включений

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k &= A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \supset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k, \\ \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k &= A_n \cap \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \subset \bigcap_{k=n+1}^{\infty} A_k \end{aligned}$$

и монотонного поведения соответствующих последовательностей событий.

Следующее утверждение известно как *лемма Бореля–Кантелли.*

Лемма 3.3. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

то $P(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Доказательство. С учётом представления (3.4), теоремы о непрерывности вероятности и оценки (3.1) получаем для $A^* = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

$$P(A^*) = P\biggl(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\biggr) = \lim_{n\to\infty} P\biggl(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\biggr) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0,$$

где собственно равенство нулю следует из условия сходимости ряда вероятностей.

Можно вспомнить, что верхний предел последовательности множеств есть множество тех элементарных исходов, которые принадлежат бесконечному поднабору (подпоследовательности) множеств из $A_1, A_2, \ldots$. В условиях леммы Бореля–Кантелли это событие имеет вероятность ноль, а дополнительное к нему – вероятность единица. Таким образом, лемма Бореля–Кантелли может быть сформулирована так: *если* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *то с вероятностью единица происходит только конечное число событий из* $A_1, A_2, \ldots$.

Сходимость с вероятностью единица. Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_n \colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ сходится *с вероятностью единица* или, другими словами, *почти наверное*, если

$$P\Bigl\{\omega\colon \text{существует } \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\Bigr\} = 1. \tag{3.5}$$

Чуть ниже мы покажем, что множество под знаком вероятности принадлежит сигма-алгебре событий, т. е. вероятность в (3.5) обязательно существует. Кроме того, если выполнено условие (3.5), то соответствие

$$\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega),$$

обязательно является случайной величиной. Этот факт мы оставим без доказательства, поскольку в наших дальнейших рассуждениях предел будет задан априори.

Рассмотрим более подробно определение сходимости с вероятностью единица. Пусть $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ при $n \to \infty$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $n \in \{1, 2, \ldots\}$ такое, что $|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon$ для всех $k \geqslant n$. Запишем этот факт в терминах операций над множествами: заменим все условия типа «для любого» операцией пересечения, а все условия типа «существует» – операцией объединения. Получим

$$\begin{aligned}\bigl\{\omega\colon \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)\bigr\} &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\bigr\} = \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \liminf_{n\to\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\bigr\}.\end{aligned}$$

Без ограничения общности можно записать

$$\bigl\{\omega\colon \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(\omega)\bigr\} = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < 1/m\bigr\} =$$
$$= \bigcap_{m=0}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < 1/m\bigr\}, \tag{3.6}$$

заставив индекс во внешнем пересечении пробегать счётное множество значений вместо несчётного $\varepsilon > 0$. Здесь мы для $m = 0$ положили $1/m = \infty$ и

$$\bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < \infty\bigr\} \overset{\text{def}}{=} \Omega.$$

Замечание. Соотношения (3.6) показывают, что множество тех исходов, при которых существует $\lim \xi_n(\omega)$, принадлежит сигма-алгебре событий.

Итак, сходимость с вероятностью единица,

$$P\bigl\{\omega\colon \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(\omega)\bigr\} = 1,$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух равенств

$$\begin{aligned} P\Bigl(\bigcap_{\varepsilon>0} \liminf_{n\to\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < \varepsilon\bigr\}\Bigr) &= 1,\\ P\Bigl(\bigcap_{m=0}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < 1/m\bigr\}\Bigr) &= 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

По лемме 3.2 второе из этих равенств эквивалентно тому, что

$$P\bigl(\liminf_{n\to\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < 1/m\bigr\}\bigr) = 1, \qquad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.8}$$

Нетрудно сообразить, что в условии (3.8) можно заменить $1/m$ на ε:

$$P\bigl(\liminf_{n\to\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < \varepsilon\bigr\}\bigr) = 1, \qquad \varepsilon > 0. \tag{3.9}$$

Эквивалентность (3.8) и (3.9) видна из следующих рассуждений. Пусть

$$A_n(x) = \bigl\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < x\bigr\}, \qquad x > 0.$$

Очевидно, что если $x_1 \leqslant x_2$, то

$$|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < x_1 \quad\Longrightarrow\quad |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < x_2,$$

или, в терминах множеств, $A_n(x_1) \subset A_n(x_2)$, что приводит к $P(A_n(x_1)) \leqslant P(A_n(x_2))$. Учитывая включение $A_k(x_1) \subset A_k(x_2)$ при нахождении пересечений и объединений, приходим к

$$\liminf_{n\to\infty} A_n(x_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k(x_1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k(x_2) = \liminf_{n\to\infty} A_n(x_2)$$

и

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n(x_1)) \leqslant P(\liminf_{n\to\infty} A_n(x_2)), \quad \text{если} \quad x_1 \leqslant x_2.$$

Таким образом, если $x_1 \leqslant x_2$ и $P(\liminf_{n\to\infty} A_n(x_1)) = 1$, то $P(\liminf_{n\to\infty} A_n(x_2)) = 1$.

Теперь вернёмся к доказательству эквивалентности равенств (3.8) и (3.9). Если выполнено (3.8), то, находя для любого $\varepsilon > 0$ число $1/m \leqslant \varepsilon$, в силу приведённых выше рассуждений получаем (3.9). Если, наоборот, выполнено (3.9), то подберём для данного m число $\varepsilon \leqslant 1/m$, получим (3.8).

Подведём итог. Сходимость с вероятностью единица,

$$P\big(\{\omega\colon \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(\omega)\}\big) = 1,$$

имеет место тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\big(\liminf_{n\to\infty}\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}\big) = 1.$$

Переходя к дополнительным событиям, получим важную для нас лемму.

Лемма 3.4. *Последовательность* $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ *сходится к* ξ *с вероятностью единица тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$

$$P\big(\limsup_{n\to\infty}\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0.$$

Объединяя последнюю лемму и лемму Бореля–Кантелли, получаем ещё одно утверждение.

Лемма 3.5. *Если для любого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) < \infty, \tag{3.10}$$

то последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ *сходится к случайной величине* ξ *с вероятностью единица.*

Доказательство. В самом деле, по лемме Бореля–Кантелли из (3.10) имеем

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

по лемме 3.4 это влечёт сходимость последовательности $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ к случайной величине ξ с вероятностью единица.

На основании доказанных фактов докажем ещё одно утверждение.

Утверждение 1. *Сходимость с вероятностью единица влечёт сходимость по вероятности*:

$$\xi_n \overset{\text{п. н.}}{\to} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi_n \overset{\text{P}}{\to} \xi, \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Проведём доказательство от противного. Пусть последовательность $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ не сходится по вероятности к случайной величине ξ. Это означает, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $P\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon_0\big)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Это, в свою очередь, означает, что найдётся число $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}_{k=\overline{1,\infty}}$ такие, что

$$P\bigl(|\xi_{n_k} - \xi| \geqslant \varepsilon_0\bigr) \geqslant \delta, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

следовательно,

$$P\Biggl(\bigcup_{k=s}^{\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_{n_k}(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon_0\bigr\}\Biggr) \geqslant \delta, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

и, в силу (3.4),

$$P\bigl(\limsup_{k\to\infty}\bigl\{\omega\colon |\xi_{n_k}(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon_0\bigr\}\bigr) = \lim_{s\to\infty} P\Biggl(\bigcup_{k=s}^{\infty} \bigl\{\omega\colon |\xi_{n_k}(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon_0\bigr\}\Biggr) \geqslant \delta > 0.$$

Это означает, что для подпоследовательности $\{\xi_{n_k}\}_{k=\overline{1,\infty}}$ и, следовательно, для всей последовательности $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$ неверно, что они сходятся к случайной величине ξ с вероятностью единица.

Усиленный закон больших чисел. Напомним, что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ попарно некоррелированы, $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при любых $i \neq j$, и дисперсии этих случайных величин ограничены в совокупности, $D\xi_k \leqslant \sigma^2$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Это утверждение носит название *закон больших чисел* (в форме Чебышёва) и вытекает из неравенства Чебышёва:

$$P\Biggl(\Biggl|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)\Biggr| > \varepsilon\Biggr) \leqslant D\Biggl(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Biggr) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k \leqslant \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

В частности, если $M\xi_k = \mu$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu.$$

Докажем, что в этом случае имеет место и сходимость с вероятностью единица. Эта теорема носит название *усиленный закон больших чисел.*

Теорема 3.1. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ некоррелированы,* $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ *при любых $i \neq j$, и $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k \leqslant \sigma^2 < \infty$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu.$$

Сделав замену $\xi_k \mapsto \xi_k - \mu$, мы будем считать, что $\mu = 0$. Поскольку доказательство довольно длинное и в большой степени техническое, разобъём его на две части.

Теорема 1.1. *Пусть случайные величины α_m и β_m с вероятностью единица принимают неотрицательные значения и*

$$P(\alpha_m \geqslant \varepsilon) \leqslant O\left(\frac{1}{m^2}\right), \qquad P(\beta_m \geqslant \varepsilon) \leqslant O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{3.11}$$

т. е. вероятность можно оценить сверху некоторой величиной, которая имеет порядок $O(1/m^2)$ при $m \to \infty$. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ выберем натуральное число m_n так, чтобы $m_n^2 < n \leqslant (m_n+1)^2$. Если для всех $\omega \in \Omega$ верна оценка

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\right| \leqslant \alpha_{m_n}(\omega) + \beta_{m_n}(\omega), \tag{3.12}$$

то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overset{\text{п. н.}}{\to} 0.$$

Доказательство. В силу условия (3.11) имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(\alpha_m \geqslant \varepsilon) < \infty, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} P(\beta_m \geqslant \varepsilon) < \infty,$$

отсюда по лемме 3.5 $\alpha_m \overset{\text{п. н.}}{\to} 0$ и $\beta_m \overset{\text{п. н.}}{\to} 0$ при $m \to \infty$, другими словами, найдутся множества $A, B \subset \Omega$ такие, что при $m \to \infty$

$$\alpha_m(\omega) \to 0 \quad \text{при всех} \quad \omega \in A, \qquad \beta_m(\omega) \to 0 \quad \text{при всех} \quad \omega \in B$$

и при этом $P(A) = 1$, $P(B) = 1$. Тогда на множестве $A \cap B$ мы имеем для $m \to \infty$

$$\alpha_m(\omega) + \beta_m(\omega) \to 0 \quad \text{при всех} \quad \omega \in A \cap B, \qquad P(A \cap B) = 1.$$

Очевидно, что это же утверждение верно и для любых подпоследовательностей $\{\alpha_{m_n}\}_{n=1,\infty}$ и $\{\beta_{m_n}\}_{n=1,\infty}$. Выбирая эти подпоследовательности так, как сказано в условии теоремы, т. е. из условия $m_n^2 < n \leqslant (m_n+1)^2$, получаем, что для всех $\omega \in A \cap B$ (где $P(A \cap B) = 1$) и для всех $n > 1$

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\right| \leqslant \alpha_{m_n}(\omega) + \beta_{m_n}(\omega) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

что и влечёт

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overset{\text{п. н.}}{\to} 0.$$

Теорема 1.2. *Для любого $n > 1$ и для любых n_1, n_2 таких, что $n_1 < n \leqslant n_2$, существуют такие случайные величины α_{n_1} и β_{n_1,n_2}, что для любого $\omega \in \Omega$*

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\right| \leqslant \alpha_{n_1}(\omega) + \beta_{n_1,n_2}(\omega), \tag{3.13}$$

и при $n_1 = m^2$ и $n_2 = (m+1)^2$ выполнено условие (3.11).

Доказательство. Всюду в доказательстве мы будем опускать зависимость случайных величин от ω, если утверждение верно для любого $\omega \in \Omega$.

Начнём с простых неравенств

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right| + \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{n}\xi_k\right|, \qquad n_1 < n. \tag{3.14}$$

Далее положим

$$\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{n_1}$$

и тем самым определим случайную величину α_{n_1}, причём, очевидно, $\alpha_{n_1} \geqslant 0$ с вероятностью единица.

Для определения случайной величины β_{n_1,n_2} запишем следующее очевидное неравенство, справедливое при $n_1 < n \leqslant n_2$:

$$\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{n}\xi_k\right| \leqslant \max_{n_1<r\leqslant n_2}\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{n_1,n_2}.$$

Понятно, что $\beta_{n_1,n_2} \geqslant 0$ с вероятностью единица.

Подставляя все полученные оценки в (3.14), получаем (при $n > 1$)

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right| \leqslant \alpha_{n_1} + \beta_{n_1,n_2}, \qquad n_1 < n \leqslant n_2.$$

Итак, мы нашли случайные величины α_{n_1} и β_{n_1,n_2} такие, что выполнено неравенство (3.13).

Для получения оценок (3.11) применим неравенство Чебышёва (напомним, что $M\xi_k = 0$, $D\xi_k \leqslant \sigma^2$): для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\alpha_{n_1} \geqslant \varepsilon) = P\left(\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\right) = \frac{1}{n_1^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n_1}D\xi_k \leqslant \frac{\sigma^2}{n_1\varepsilon^2}. \tag{3.15}$$

Далее, событие

$$\beta_{n_1,n_2} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n<r\leqslant n_2}\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \geqslant \varepsilon$$

происходит тогда и только тогда, когда найдётся номер r из интервала значений $n < r \leqslant n_2$, при котором

$$\left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \geqslant \varepsilon,$$

что, как обычно, можно перформулировать в терминах объединения множеств:

$$\bigl\{\omega\colon \beta_{n_1,n_2} \geqslant \varepsilon\bigr\} = \bigcup_{r=n_1+1}^{n_2}\left\{\omega\colon \left|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\right| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

Отсюда

$$P\big(\beta_{n_1,n_2} \geqslant \varepsilon\big) = P\Bigg(\bigcup_{r=n_1+1}^{n_2}\bigg\{\omega\colon \bigg|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\bigg| \geqslant \varepsilon\bigg\}\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{r=n_1+1}^{n_2} P\Bigg(\bigg|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\bigg| \geqslant \varepsilon\bigg\}\Bigg), \tag{3.16}$$

где мы воспользовались леммой 3.1. Снова применим неравенство Чебышёва:

$$P\Bigg(\bigg|\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\bigg| \geqslant \varepsilon\bigg\}\Bigg) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}D\bigg(\frac{1}{n_1}\sum_{k=n_1+1}^{r}\xi_k\bigg) =$$
$$= \frac{1}{n_1^2\varepsilon^2}\sum_{k=n_1+1}^{r}D\xi_k \leqslant \frac{1}{n_1^2\varepsilon^2}\sum_{k=n_1+1}^{r}\sigma^2 = \frac{(r-n_1)\sigma^2}{n_1^2\varepsilon^2}.$$

Подставляя эту оценку в каждое слагаемое правой части (3.16), получаем

$$P\big(\beta_{n_1,n_2} \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \sum_{r=n_1+1}^{n_2}\frac{(r-n_1)\sigma^2}{n_1^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n_1^2\varepsilon^2}\big(1+2+\dots+(n_2-n_1)\big) =$$
$$= \frac{\sigma^2}{n_1^2\varepsilon^2}\,\frac{(n_2-n_1)(n_2-n_1+1)}{2}. \tag{3.17}$$

Подставим в правые части (3.15) и (3.17) значения $n_1 = m^2$ и $n_2 = (m+1)^2$. С учётом равенства

$$\frac{(n_2-n_1)(n_2-n_1+1)}{n_1^2} = \frac{(2m+1)(2m+2)}{m^4}$$

получаем из (3.15) и (3.17) искомые оценки (3.11):

$$P(\alpha_m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{m^2} = O\bigg(\frac{1}{m^2}\bigg),$$
$$P\big(\beta_m \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{(2m+1)(m+1)}{m^4} = O\bigg(\frac{1}{m^2}\bigg).$$

Теорема доказана.

Объединяя утверждения теорем 1.1 и 1.2, получаем доказательство теоремы 3.1.

Как следствие усиленного закона больших чисел получаем утверждение о сходимости частоты к вероятности.

Теорема 2. *Пусть случайная величина ζ_n равна частоте наступлений успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $\zeta_n \overset{\text{п. н.}}{\to} p$.*

Доказательство. Представим частоту успеха как (ξ_k – число успехов в единичном (k-м) испытании)

$$\zeta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \qquad P(\xi_k = 1) = p, \quad P(\xi_k = 0) = q.$$

Тогда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, $M\xi_k = p$, $D\xi_k = pq$, и мы можем применить к ним теорему 3.1. Получаем $\zeta_n \overset{\text{п. н.}}{\to} p$.