1. КОНЕЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Рассмотрим последовательность случайных величин ξ_n, $n = 0, 1, \ldots$, каждая из коорых распределена дискретно и принимает значения из одного и того же множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$ с $2 \leqslant s < \infty$.

1.1. Определение цепи Маркова. Свойства матриц перехода.

Определение 1.1. Случайная последовательность ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, со значениями в множестве $\{x_1, \ldots, x_s\}$ называется *однородной цепью Маркова*[1], если ее конечномерные распределения задаются следующим образом:

$$n = 0: \quad P(\xi_0 = x_i) = a_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, s, \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i = 1; \tag{1.1}$$

$$n > 0: \quad P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = a_{i_0}\pi_{i_0 i_1} \ldots \pi_{i_{n-1}, i_n}, \tag{1.2}$$

где π_{ij} – некоторые числа, $i, j = 1, \ldots, s$; здесь значения $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ выбраны произвольным образом из множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$.

Определение 1.2. Значение x_i назовём i-м *состоянием* цепи Маркова. Если произошло событие $\xi_n = x_i$, то будем говорить, что цепь Маркова на n-м *шаге* пребывала в i-ом состоянии.

Равенства (1.1) задают распределение цепи Маркова на первом шаге, или *начальное распределение.* Видно, что формула (1.1) никак не ограничивает вид этого (дискретного) распределения.

Смысл коэффициентов π_{ij} в (1.2) раскрывают следующие рассуждения. Для $n = 1, 2$ равенства (1.2) принимают вид

$$P(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_j) = a_i \pi_{ij}, \qquad P(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k) = a_i \pi_{ij} \pi_{jk},$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\pi_{jk} &= \frac{P(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k)}{a_i \pi_{ij}} = \frac{P(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_2, \xi_2 = x_k)}{P(\xi_0 = x_i, \xi_1 2 = x_j)} = \\ &= P(\xi_2 = x_k \,|\, \xi_1 = x_j, \xi_0 = x_i).\end{aligned} \tag{1.3}$$

С другой стороны, по определению условной вероятности

$$P(\xi_2 = x_k \,|\, \xi_1 = x_j) = \frac{P(\xi_2 = x_k, \xi_1 2 = x_j)}{P(\xi_1 = x_j)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} P(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k)}{\sum\limits_{i=1}^{s} P(\xi_0 = x_i, \xi_1 = x_j)},$$

где мы разложили события $\{\xi_2 = x_k, \xi_1 = x_j\}$ и $\{\xi_1 = x_j\}$ по полной группе попарно несовместных событий $\{\xi_0 = x_i\}$, $i = 1, \ldots, s$. Подставляя определение (1.2), получаем

$$P(\xi_2 = x_k \,|\, \xi_1 = x_j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} a_i \pi_{ij} \pi_{jk}}{\sum\limits_{i=1}^{s} a_i \pi_{ij}} = \pi_{jk}. \tag{1.4}$$

[1] Смысл термина «однородность» будет раскрыт далее.

Сравнивая формулы (1.3) и (1.4), приходим к выводу, что

$$\pi_{jk} = P(\xi_2 = x_k \,|\, \xi_1 = x_j) = P(\xi_2 = x_k \,|\, \xi_1 = x_j, \xi_0 = x_i).$$

Аналогично, для общих значений $n \geqslant 3$ имеем

$$\begin{aligned}
\pi_{i_{n-1},i_n} &= \frac{P(\xi_0 = x_{i_1}, \xi_1 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n})}{a_{i_0}\pi_{i_0 i_1}\ldots\pi_{i_{n-2},i_{n-1}}} = \\
&= \frac{P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n})}{P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})} = \\
&= P(\xi_n = x_{i_n} | \, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = x_{i_0}).
\end{aligned}$$

С другой стороны, разлагая по состояниям на шагах с номерами $0, 1, \ldots, n-2$, получаем

$$\begin{aligned}
P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) &= \frac{P(\xi_n = x_{i_n}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})}{P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})} = \\
&= \frac{\sum\limits_{(i)=1}^{s} P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n})}{\sum\limits_{(i)=1}^{s} P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})} = \\
&= \frac{\sum\limits_{(i)=1}^{s} a_{i_0}\pi_{i_0 i_1}\ldots\pi_{i_{n-2},i_{n-1}}\pi_{i_{n-1},i_n}}{\sum\limits_{(i)=1}^{s} a_{i_0}\pi_{i_0 i_1}\ldots\pi_{i_{n-2},i_{n-1}}} = \pi_{i_{n-1},i_n},
\end{aligned}$$

где суммирование по (i) означает $(n-1)$-кратное суммирование по всем индексам $i_0, \ldots, i_{n-2}$, изменяющимся от 1 до s.

Таким образом,

$$P(\xi_n = x_{i_n} | \, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = x_{i_0}) = P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) \qquad (1.5)$$

и

$$\pi_{ij} = P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i), \qquad i, j = 1, \ldots, s, \quad n = 1, 2, \ldots \, . \qquad (1.6)$$

Условные вероятности (1.6) образуют матрицу π размера $s \times s$, которая называется *матрицей перехода за один шаг.*

Равенство (1.5) часто принимают вместо (1.2) за определение цепи Маркова. Нетрудно доказать, что из (1.5) следует (1.2): в самом деле, из определения условной вероятности следует, что

$$\begin{aligned}
P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, &\ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = \\
&= P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0}) \times \\
&\quad \times P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0}),
\end{aligned}$$

а из (1.5) мы имеем

$$P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0}) = P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) = \pi_{i_{n-1},i}.$$

Таким образом, мы получаем

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \dots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = \\
&\qquad = \pi_{i_{n-1},i} P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \dots, \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0}).
\end{aligned}
$$

Применяя аналогичные рассуждения к $P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \dots, \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0})$, получаем

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \dots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) = \\
&\qquad = \pi_{i_{n-2},i_{n-1}} P(\xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \dots, \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0})
\end{aligned}
$$

и, объединяя две последние формулы, имеем

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \dots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = \\
&\qquad = \pi_{i_{n-1},i}\, \pi_{i_{n-2},i_{n-1}} P(\xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \dots, \xi_1 = x_{i_1}, \xi_0 = x_{i_0}).
\end{aligned}
$$

Продолжая эту процедуру до

$$
P(\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}) = P(\xi_1 = x_{i_1} \,|\, \xi_0 = x_{i_0}) P(\xi_0 = x_{i_0}) = \pi_{i_0 i_1} a_{i_0},
$$

в конечном итоге приходим к (1.2).

Отметим, что в (1.6) условные вероятности $P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i)$ определяются только индексами i, j и не зависят от n, т. е. по сути от момента времени t_n. Такое свойство называется *однородностью* цепи Маркова. Итак, мы рассматриваем однородные цепи Маркова с конечным числом состояний s.

Замечание 1.1. Если случайные $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ независимы при всех $n = 1, 2, \dots$, то условие (1.5), очевидно, выполнено, причём

$$
\pi_{ij} = P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i) = P(\xi_n = x_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \tag{1.7}
$$

и мы видим, что в этом случае элементы матрицы перехода не зависят от первого индекса, т. е. в матрице перехода за один шаг все строки одинаковы (как обычно, считаем, что первый индекс элемента матрицы отвечает номеру строки, а второй — номеру столбца).

Замечание 1.2. Условие (1.5) означает, что условное распределение случайной величины ξ_n при условии, что значения случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi n - 1$ фиксированы, в точности совпадает условным распределением случайной величины ξ_n при условии, что фиксировано только значение случайной величины $\xi n - 1$. Это не влечёт статистическую независимость случайной величины ξ_n от случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_{n-2}$ — **все шаги цепи Маркова статистически зависимы**.

По аналогии с (1.6) определим *вероятность перехода за $m > 1$ шагов*

$$
\pi_{ij}^{(m)} = P(\xi_{n+m} = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i), \qquad i, j = 1, 2, \dots, s, \tag{1.8}
$$

и соответствующую *матрицу $\pi^{(m)}$ перехода за m шагов* размера $s \times s$ с элементами (1.8). Тогда последнее замечание можно переформулировать так: в общем случае матрица перехода за m шагов не обязана иметь одинаковые строки.

Докажем несколько утверждений, вытекающих непосредственно из определения цепи Маркова.

1. Очевидно, что, как и любая вероятность, условная вероятность лежит в интервале $[0,1]$, поэтому

$$0 \leqslant \pi_{ij}^{(n)} \leqslant 1, \quad n=1,2,\ldots, \quad i,j=1,\ldots,s.$$

2. Для любого $m=1,2,\ldots$ и всех $i=1,\ldots,s$

$$\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}^{(m)} = \sum_{j=1}^{s} P(\xi_{m+n}=x_j \,|\, \xi_n=x_i) = \sum_{j=1}^{s} \frac{P(\xi_{m+n}=x_j, \xi_n=x_i)}{P(\xi_n=x_i)} =$$
$$= \frac{1}{P(\xi_n=x_i)} \sum_{j=1}^{s} P(\xi_{m+n}=x_j, \xi_n=x_i) = \frac{P(\xi_n=x_i)}{P(\xi_n=x_i)} = 1$$

в силу того, что последняя сумма отвечает разложению события $\{\xi_{m+n}=x_j\}$ по полной группе событий $\{\xi_n=x_i\}$, $i=1,\ldots,s$. Последняя цепочка равенств показывает, что сумма элементов в каждой из строк матрицы перехода за m шагов равна 1. Это свойство по сути есть условие нормировки условного распределения случайной величины ξ_{m+n} (при условии, что $\xi_n=x_i$).

Матрица $\pi^{(n)}$ с неотрицательными элементами, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)} = 1, \tag{1.9}$$

называется *стохастической*.

Используя матрицу перехода за n шагов, мы можем записать, что вероятность того, что на $(n+1)$-м шаге цепь Маркова окажется в k-м состоянии, равна

$$P(\xi_n=x_k) = \sum_{j=1}^{s} P(\xi_n=x_k \,|\, \xi_0=x_j) P(\xi_0=x_j) = \sum_{j=1}^{s} a_j \pi_{jk}^{(n)}, \tag{1.10}$$

С другой стороны, в силу (1.2)

$$P(\xi_n=x_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{j_2=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} P(\xi_0=x_j, \xi_1=x_{j_1}, \ldots, \xi_{n-1}=x_{j_{n-1}}, \xi_n=x_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{j_1=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} a_j \pi_{jj_1} \ldots \pi_{j_{n-1}k},$$

где мы вновь применили разложение события $\{\xi_n=x_k\}$ по полной группе событий, образованной всевозможными состояниями цепи Маркова на шагах с номерами $0,1,\ldots,n-1$. Сравнивая последнее выражение с (1.10), видим, что

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \pi_{jk}^{(n)} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{j_1=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} a_j \pi_{jj_1} \ldots \pi_{j_{n-1}k},$$

причём это равенство имеет место при любых начальных вероятностях $a_1, \dots, a_s$. Положим $a_i = 1$ и $a_{i'} = 0$ при $i' \neq i$. Отсюда получим

$$\pi_{ik}^{(n)} = \sum_{j_1=1}^{s} \sum_{j_2=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} \pi_{ij_1}\pi_{j_1j_2}\dots\pi_{j_{n-1}k}. \tag{1.11}$$

Видно, что в правой части мы имеем элемент π_{ik}^n матрицы $\pi^n = \pi \dots \pi$, и мы получаем важнейшее свойство матриц перехода в однородных цепях Маркова.

3. Матрица перехода за n шагов есть n-я степень матрицы перехода за один шаг,

$$\pi^{(n)} = \pi^n \tag{1.12}$$

при любых $n = 1, 2, \dots$ (для красоты формулы мы положили $\pi = \pi^{(1)}$).

4. С учетом последнего свойства, записав равенства $\pi^{(n+m)} = \pi^{n+m} = \pi^n \cdot \pi^m$, получаем уравнение

$$\pi_{ij}^{(n+m)} = \pi^{(n)}\pi^{(m)}, \tag{1.13}$$

которое связывает различные матрицы в бесконечном семействе матриц перехода $\{\pi^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$ и представляет собой частный случай знаменитого *уравнения Чепмена–Колмогорова.*

1.2. Эргодичность цепи Маркова. Естественно предположить, что система должна «забывать» о своём начальном состоянии в пределе бесконечно большого числа шагов. С точки зрения матриц перехода это означает, что переходная вероятность не должна зависеть от начального состояния при $n \to \infty$.

Определение 1.3. Если для любых $i, j = 1, \dots, s$ существует предел переходной вероятности

$$p_j = \lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)}, \tag{1.14}$$

и величина этого предела не зависит от i, то будем говорить, что у цепи Маркова существуют *финальные вероятности.*

Теорема, в которой формулируется достаточное условие существования финальных вероятностей, называется *теоремой Маркова.* Предпошлём её доказательству техническую лемму, справедливую для любых стохастических матриц.

Лемма 1.1. *Пусть матрица π с неотрицательными элементами удовлетворяет условию стохастичности, т. е. $\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij} = 1$ для любого $i = 1, \dots, s$. Рассмотрим две строки матрицы π с фиксированными номерами α и β. Положим*

$$S^+(\alpha, \beta) = \sum_{k:\ \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} \geqslant 0} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}). \tag{1.15}$$

Имеют место следующие утверждения:
1) $S^+(\alpha, \beta) = S^+(\beta, \alpha)$;
2) *если найдется номер столбца $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ такой, что $\pi_{ij} \geqslant \delta > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, s$, то*

$$S^+(\alpha, \beta) \leqslant 1 - \delta. \tag{1.16}$$

Доказательство. Заметим, что

$$S^+(\beta,\alpha) = \sum_{k:\ \pi_{\beta k}-\pi_{\alpha k}\geqslant 0} (\pi_{\beta k} - \pi_{\alpha k}) = -\sum_{k:\ \pi_{\alpha k}-\pi_{\beta k}\leqslant 0} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}).$$

Понятно, что из суммы можно исключить слагаемые, равные нулю, т. е.

$$S^+(\beta,\alpha) = -\sum_{k:\ \pi_{\alpha k}-\pi_{\beta k}<0} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}). \tag{1.17}$$

Разобьем множество $\{1,\dots,s\}$ на два подмножества

$$\mathcal{K}^+ = \bigl\{k\colon \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} \geqslant 0\bigr\}, \quad \mathcal{K}^- = \bigl\{k\colon \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} < 0\bigr\}$$

(вариант разбиения, конечно, зависит от α и β). В этих обозначениях (1.15) и (1.17) запишутся как

$$S^+(\alpha,\beta) = \sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}), \qquad S^+(\beta,\alpha) = -\sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}).$$

Отсюда

$$S^+(\alpha,\beta) - S^+(\beta,\alpha) = \Biggl(\sum_{k\in\mathcal{K}^+} + \sum_{k\in\mathcal{K}^-}\Biggr)(\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}) = \sum_{k=1}^{s}(\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}) = 1 - 1 = 0$$

в силу стохастичности матрицы π, таким образом, равенство $S^+(\alpha,\beta) = S^+(\beta,\alpha)$ доказано.

Далее,

$$1 = \sum_{k=1}^{s} \pi_{\alpha k} = \sum_{k\in\mathcal{K}^+} \pi_{\alpha k} + \sum_{k\in\mathcal{K}^-} \pi_{\alpha k}, \qquad \sum_{k\in\mathcal{K}^+} \pi_{\alpha k} = 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}^-} \pi_{\alpha k},$$

следовательно,

$$S^+(\alpha,\beta) = \sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}) = \sum_{k\in\mathcal{K}^+} \pi_{\alpha k} - \sum_{k\in\mathcal{K}^+} \pi_{\beta k} = \Biggl(1 - \sum_{k\in\mathcal{K}^-} \pi_{\alpha k}\Biggr) - \sum_{k\in\mathcal{K}^+} \pi_{\beta k}. \tag{1.18}$$

Пусть номер столбца j взят из второго утверждения леммы. Очевидно, что, каков бы ни был этот номер $j \in \{1,\dots,s\}$, либо $j \in \mathcal{K}^+$, либо $j \in \mathcal{K}^-$. Если $j \in \mathcal{K}^+$, то в силу неотрицательности всех элементов матрицы π имеем

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^+} \pi_{\beta k} \geqslant \pi_{\beta j} \geqslant \delta, \quad \sum_{k\in\mathcal{K}^-} \pi_{\alpha k} \geqslant 0,$$

следовательно, $S^+(\alpha,\beta) \geqslant (1-0) - \delta$. Если $j \in \mathcal{K}^-$, то наоборот

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^-} \pi_{\alpha k} \geqslant \pi_{\alpha j} \geqslant \delta, \quad \sum_{k\in\mathcal{K}^+} \pi_{\beta k} \geqslant 0.$$

следовательно, $S^+(\alpha,\beta) \geqslant (1-\delta) - 0$. В любом случае получаем неравенство (1.16).

Перейдем к теореме Маркова.

Теорема 1.1. *Пусть найдется натуральное число* n_0 *такое, что матрица перехода* $\pi^{(n_0)}$ *за* n_0 *шагов цепи Маркова имеет хотя бы один столбец, не содержащий нулевых элементов. Тогда*:
1) *для любого* $j = 1, \ldots, s$ *существуют финальные вероятности* $p_j = \lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)}$, *которые не зависят от номера* i *начального состояния*;
2) *вероятности* $p_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$, *образуют распределение, т. е.* $\sum_{j=1}^{s} p_j = 1$;
3) *для любого* $j = 1, 2, \ldots, s$ *и для любого* $m = 1, 2, \ldots$ *имеет место равенство*

$$p_j = \sum_{k=1}^{s} p_k \pi_{kj}^{(m)}; \tag{1.19}$$

4) *финальные вероятности являются предельными значениями для распределения на* n*-м шаге*,

$$p_j = \lim_{n\to\infty} P(\xi_n = x_j), \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{1.20}$$

Доказательство. Для $j = 1, \ldots, s$ ведем обозначения

$$M_j^{(n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \pi_{ij}^{(n)}, \qquad m_j^{(n)} = \min_{1\leqslant i\leqslant s} \pi_{ij}^{(n)},$$

тогда для любых $i = 1, 2, \ldots, s$

$$0 \leqslant m_j^{(n)} \leqslant \pi_{ij}^{(n)} \leqslant M_j^{(n)} \leqslant 1. \tag{1.21}$$

Применим к матрице $\pi^{(n+1)}$ уравнение (1.13), получим

$$M_j^{(n+1)} = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \pi_{ij}^{(n+1)} = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}\pi_{kj}^{(n)} \leqslant M_j^{(n)} \max_{1\leqslant i\leqslant s} \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = M_j^{(n)} \max_{1\leqslant i\leqslant s} 1 = M_j^{(n)}$$

в силу стохастичности матрицы перехода за один шаг. Таким образом, для каждого фиксированного $j = 1, \ldots, s$ последовательность $\{M_j^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$ не возрастает и ограничена снизу, следовательно, существует предел $M_j^* = \lim\limits_{n\to\infty} M_j^{(n)}$. Аналогичные рассуждения доказывают, что последовательность $\{m_j^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$ не убывает и существует $m_j^* = \lim\limits_{n\to\infty} m_j^{(n)}$. Очевидно, $M_j^* \geqslant m_j^*$.

Если мы покажем, что два указанных предела совпадают, $m_j^* = M_k^* = p_j$, то в силу (1.21) этого будет достаточно для того, чтобы $p_j = \lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)}$.

Рассмотрим матрицу $\pi^{(n+n_0)}$, где n_0 задано в условии теоремы. Имеем

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \pi_{ij}^{(n+n_0)} - \min_{1\leqslant i\leqslant s} \pi_{ij}^{(n+n_0)} = \pi_{\alpha j}^{(n+n_0)} - \pi_{\beta j}^{(n+n_0)}, \tag{1.22}$$

где мы обозначили через α номер строки, на которой достигается максимум, и через β — номер строки, на которой достигается минимум (разумеется, номера α, β разные для разных n и j, но до некоторого момента мы считаем n и j фиксированными). Вновь применим уравнение (1.13):

$$\pi_{\alpha k}^{(n+n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n+n_0)} = \sum_{k=1}^{n} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)})\pi_{kj}^{(n)} = \left(\sum_{k\in\mathcal{K}^+} + \sum_{k\in\mathcal{K}^-}\right)(\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)})\pi_{kj}^{(n)}, \tag{1.23}$$

где мы воспользовались обозначениями леммы 1, заменив в ней матрицу π на также стохастическую матрицу $\pi^{(n_0)}$, другими словами, в нашем случае

$$\mathcal{K}^+ = \big\{k\colon \pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k} \geqslant 0\big\}, \qquad \mathcal{K}^- = \big\{k\colon \pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k} < 0\big\}.$$

Оценим сверху каждую из двух сумм в правой части (1.23). Для $k \in \mathcal{K}^+$ мы имеем оценку $\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k} \geqslant 0$, тогда в силу $\pi^{(n)}_{kj} \leqslant M^{(n)}_j$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k})\pi^{(n)}_{kj} \leqslant M^{(n)}_j \sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k}).$$

Для $k \in \mathcal{K}^-$ множитель $\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k}$ отрицателен, поэтому для оценки величины $(\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k})\pi^{(n)}_{kj}$ сверху нам придется оценить множитель $\pi^{(n)}_{kj}$ снизу: $\pi^{(n)}_{kj} \geqslant m^{(n)}_j$. Тогда

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k})\pi^{(n)}_{kj} \leqslant m^{(n)}_j \sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k}).$$

Подставим полученные оценки в (1.23) и затем учтем равенство (1.22), в итоге получим

$$M^{(n+n_0)}_j - m^{(n+n_0)}_j \leqslant M^{(n)}_j \sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k}) + m^{(n)}_j \sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k}).$$

В обозначениях леммы 1 первая сумма в правой части последнего неравенства есть $S^+(\alpha,\beta)$. Преобразуем вторую сумму аналогично тому, как мы поступали при доказательстве леммы 1:

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k}) = \sum_{k\colon \pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k} \leqslant 0} (\pi^{(n_0)}_{\alpha k} - \pi^{(n_0)}_{\beta k}) =$$
$$= - \sum_{k\colon \pi^{(n_0)}_{\beta k} - \pi^{(n_0)}_{\alpha k} \geqslant 0} (\pi^{(n_0)}_{\beta k} - \pi^{(n_0)}_{\alpha k}) = -S^+(\beta,\alpha) = -S^+(\alpha,\beta),$$

где в последнем равенстве мы учли первое утверждение леммы 1. Таким образом,

$$M^{(n+n_0)}_j - m^{(n+n_0)}_j \leqslant M^{(n)}_j S^+(\alpha,\beta) - m^{(n)}_j S^+(\beta,\alpha) = \big(M^{(n)}_j - m^{(n)}_j\big) S^+(\alpha,\beta).$$

По условию теоремы в матрице $\pi^{(n_0)}$ найдется столбец, в котором нет нулевых элементов, т. е. при некотором j_0

$$\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant s} \pi^{(n)}_{ij_0} > 0. \tag{1.24}$$

Используем оценку (1.16) $S^+(\beta,\alpha) \leqslant (1-\delta)$ и учтем, что $M^{(n)}_j - m^{(n)}_j \geqslant 0$, получим

$$M^{(n+n_0)}_j - m^{(n+n_0)}_j \leqslant \big(M^{(n)}_j - m^{(n)}_j\big)(1-\delta). \tag{1.25}$$

Заметим, что в последнем неравенстве уже нет номеров α, β, зависящих от n и j, и мы можем утверждать, что это неравенство верно при всех значениях индексов

$n = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, \ldots, s$. Перейдем в обеих частях неравенства к пределу при $n \to \infty$ и фиксированном j:

$$M_j^* - m_j^* \leqslant (M_j^* - m_j^*)(1 - \delta).$$

Если $M_j^* - m_j^* > 0$, то, сокращая на $M_j^* - m_j^*$, получаем $1 - \delta \geqslant 1$, т. е. $\delta \leqslant 0$, что невозможно вследствие (1.24). Поэтому $M_j^* - m_j^* = 0$. Пункт 1 теоремы доказан: существует

$$p_j = \lim_{n \to \infty} \pi_{ij}^{(n)}, \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Пункты 2, 3 теоремы получаются путём перехода к пределу при $n \to \infty$ в равенствах

$$1 = \sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)}, \qquad \pi_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}^{(n)} \pi_{kj}^{(m)}$$

соответственно. Пункт 4 также вытекает из предельных соотношений

$$\lim_{n \to \infty} P(\xi_{n+1} = x_j) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)} P(\xi_1 = x_i) = \sum_{i=1}^{s} p_j a_i = p_j, \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Здесь мы учли условие нормировки начального распределения: $\sum_{i=1}^{s} a_i = 1$. Теорема доказана.

Замечание 1.3. Если дополнительно потребовать, чтобы вся матрица $\pi^{(n_0)}$ не содержала нулевых элементов, т. е. $\pi_{ij}^{(n_0)} > 0$ для всех $i, k = 1, \ldots, s$, то

$$\pi_{ij}^{(n_0)} \geqslant \delta = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant s} \pi_{ij}^{(n_0)} > 0,$$

поэтому $m_j^{(n_0)} \geqslant \delta$, следовательно, $m_j^{(n)} \geqslant \delta$ для всех $n > n_0$ в силу неубывания последовательности $\{m_j^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$. Таким образом, $p_j = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)} \geqslant \delta > 0$ для всех $j = 1, \ldots, s$. Другими словами, все финальные вероятности отличны от нуля.

Замечание 1.4. Равенство (1.19) можно интерпретировать следующим образом: если начальное распределение совпадает с финальным, $a_j = p_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, то это распределение сохраняется на любом шаге цепи Маркова, $P(\xi_n = x_j) = p_j$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. Такое распределение называется *стационарным*, и мы получили, что финальное распределение (если оно существует) с необходимостью является стационарным.

Пусть динамика некоторой физической системы происходит по законам цепи Маркова, т. е. в каждый из моментов времени $t = 1, 2, \ldots$ система может находиться в одном из состояний x_j, $j = 1, \ldots, s$, а переходы от одного состояния к другому происходят случайным образом с вероятностями, заданными матрицей π. Зафиксируем некоторое состояние x_j и введем случайную величину $\tau_j^{(n)}$, равную количеству моментов времени из $t = 1, 2, \ldots, n$, в которые система пребывала в состоянии x_j. Тогда $\tau_j^{(n)}/n$ — это доля времени, которое цепь Маркова провела в состоянии x_j. Представим $\tau_j^{(n)}$ в виде

$$\tau_j^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} \chi_j^{(m)}, \qquad \chi_j^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_m = x_j, \\ 0, & \text{если } \xi_m \neq x_j, \end{cases}$$

другими словами, $\tau_j^{(n)}$ есть количество тех шагов, на которых произошло событие $\xi_m = x_j$. Тогда математическое ожидание случайной величины $\tau_j^{(n)}/n$ равно

$$M\frac{\tau_j^{(n)}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} M\chi_j^{(m)} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P(\xi_m = x_j). \tag{1.26}$$

Покажем, что если $P(\xi_m = x_j) \to p_j$ при $m \to \infty$, то $M\tau_j^{(n)}/n \to p_j$. Для этого воспользуемся следующим простым утверждением математического анализа.

Лемма 1.2. *Пусть последовательность действительных чисел $\{a_m\}_{n=\overline{1,\infty}}$ сходится к a при $m \to \infty$. Тогда*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \to a, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Выберем произвольное натуральное $m_0 < n$ и запишем цепочку соотношений

$$\left|\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{m=1}^{n}(a_m - a)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{m=1}^{m_0}(a_m - a)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{m=m_0+1}^{n}(a_m - a)\right| = \frac{S_1}{n} + \frac{S_2}{n}. \tag{1.27}$$

Оценим величины S_2 и S_1, пользуясь сходимостями $a_m \to a$ и $1/n \to 0$ соответственно.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. В силу сходимости $a_m \to a$ найдется номер $m_0 = m_0(\varepsilon)$ такой, что $|a_m - a| < \varepsilon/2$ для всех $m > m_0$. Тогда для любого $n > m_0$ величина S_2 оценивается как

$$S_2 = \left|\sum_{m=m_0+1}^{m}(a_m - a)\right| \leqslant \sum_{m=m_0+1}^{m}|a_m - a| \leqslant (n - m_0)\frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому $S_2/n < \varepsilon/2$ при $n > m_0$.

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (1.27). Пусть $S_1 = \left|\sum_{m=1}^{m_0}(a_m - a)\right|$. В силу того что $1/n \to 0$ при $n \to \infty$, найдется номер N_1, для которого $1/n < \varepsilon/2S_1$ при всех $n > N_1$. Заметим, что N_1 зависит только от S_1 и ε. Далее, величина S_1 определяется только номером m_0 (и, разумеется, последовательностью $\{a_m\}_{n=\overline{1,\infty}}$, но ее мы считаем фиксированной), а номер m_0 зависит только от ε. Таким образом, $N_1 = N_1(\varepsilon)$.

Теперь мы должны взять номера n, при которых оба слагаемых в правой части (1.27) малы. Положим $N = \max(N_1, m_0)$. Поскольку N_1 и m_0 зависят только от ε, мы имеем $N = N(\varepsilon)$ Тогда для $n > N(\varepsilon)$

$$\left|\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{S_1}{n} + \frac{S_2}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 1.2. *Пусть* $P(\xi_m = x_j) \to p_j$ *при* $m \to \infty$, *тогда* $M\tau_j^{(n)}/n \to p_j$.

Доказательство. Положим в лемме 2 $a_m = P(\xi_m = x_j)$ и $a = p_j = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$. Из (1.26) получаем

$$\lim_{n\to\infty} M\frac{\tau_j^{(n)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P(\xi_m = x_j) = \lim_{m\to\infty} P(\xi_m = x_j) = p_j. \qquad (1.28)$$

Теорема доказана.

Можно показать, что если цепь Маркова имеет **строго положительные** финальные вероятности, то

$$\frac{\tau_j^{(n)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} p_j, \qquad (1.29)$$

в этом соотношении имеется в виду сходимость последовательности случайных величин $\tau_j^{(n)}$, $n = 1, 2 \ldots$, по вероятности.

Рассмотрим физическую интепретацию полученных результатов. Предположим, что мы имеем множество (ансамбль) систем, динамика которых происходит по правилам цепи Маркова и определяется матрицей переходных вероятностей. Будем считать, что текущий момент времени достаточно удален от начального, и распределение уже почти пришло к стационарному: $P(\xi_n = x_j) \approx p_j$ для каждой из систем. Тогда в частотной интерпретации вероятность p_j примерно равна доле систем, находящихся в данный момент времени в состоянии x_j.

Утверждения (1.28) и (1.29) говорят о том, что *в среднем доля времени, которое одна фиксированная динамическая система пребывает в состоянии* x_j *в процессе своей динамики, приблизительно равна среднему количеству систем в ансамбле, пребывающих в этом состоянии в один фиксированный момент времени.* Это свойство в физике называют эргодичностью, и мы приходим к следующему определению.

Если предельные вероятности существуют и отличны от нуля, то цепь Маркова называется *эргодической.*

Пример 1.1. Пусть $2s$ частиц, из которых s черных и s белых, размещены по s штук в два сосуда А и Б. В каждый момент времени $t = 2, 3, \ldots$ в каждом сосуде наугад выбирают по одной частице, после чего выбранные частицы меняют местами. Будем говорить, что $\xi_n = i$, если после обмена в момент времени $t = n$ в сосуде А оказалось ровно i белых частиц, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots, s$. Найдем вероятности перехода за один шаг в данной цепи Маркова.

Пусть в момент времени $t = n$ система находится в состоянии i. Тогда в сосуде А находятся i белых частиц и $n-i$ черных частиц, а в сосуде Б наоборот — $n-i$ белых и i черных частиц. Найдем вероятности тех возможных состояний, которые могут иметь место после обмена частицами.

1. Если мы обменяли белую частицу из сосуда А на черную частицу из сосуда Б, то в сосуде A окажется $i - 1$ белых частиц. При этом вероятность вынуть белую частицу из сосуда А равна i/s, а вероятность вынуть черную частицу из сосуда Б равна i/s. Таким образом, вероятность обмена белой частицы на черную равна $(i/s) \cdot (i/s)$.

2. Вероятность обмена черной частицы из сосуда А на белую частицу из сосуда Б, есть $(1-i/s)\cdot(1-i/s)$, при этом после обмена в сосуде А окажется $i+1$ белых частиц.

3. Обмен частицами одного цвета (либо белого, либо черного) происходит, очевидно, с вероятностью $(i/s)\cdot(1-i/s)+(1-i/s)\cdot(i/s)$, при этом число i белых частиц в сосуде А остается неизменным.

Формируем матрицу перехода. Для любых $0 \leqslant i, j \leqslant s$

$$\pi_{ij} = \begin{cases} (i/s)^2, & j = i-1, \\ (1-i/s)^2, & j = i+1, \\ 2(i/s)(1-i/s), & j = i, \\ 0, & |j-i| > 1. \end{cases}.$$

Рассмотренный пример представляет модель смешивания двух несжимаемых жидкостей (модель Бернулли–Лапласа).

Пример 1.2. Показать, что в цепи Маркова события $\xi_{n-1} = x_i$ и $\xi_{n+1} = x_k$ независимы при условии, что произошло событие $\xi_n = x_j$, т. е.

$$P(\xi_{n+1} = x_k, \xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j) = P(\xi_{n+1} = x_k \,|\, \xi_n = x_j) \cdot P(\xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j).$$

Решение. Запишем цепочку простейших соотношений

$$\begin{aligned} P(\xi_{n+1} = x_k, \xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j) &= \frac{P(\xi_{n+1} = x_k, \xi_n = x_j, \xi_{n-1} = x_i)}{P(\xi_n = x_j)} = \\ &= \frac{P(\xi_{n+1} = x_k \,|\, \xi_n = x_j, \xi_{n-1} = x_i) P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i) P(\xi_n = x_j)}{P(\xi_n = x_j)} = \\ &= P(\xi_{n+1} = x_k \,|\, \xi_n = x_j) P(\xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j). \end{aligned}$$

Говорят, что при фиксированном настоящем (т. е. при фиксированном состоянии на n-м шаге) прошлое, $(n-1)$-й шаг, и будущее, $(n+1)$-й шаг, цепи Маркова независимы. Полезно сопоставить это факт с общей статистической зависимостью шагов цепи Маркова, если мы не фиксируем «настоящее» (см. замечание 1.2).