Пытьев Ю. П., Балакин Д. А., Фаломкина О. В., Чуличков А. И.

Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях

Учебное пособие по специальному курсу
кафедры математического моделирования и информатики

Москва
Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова
2022

Пытьев Юрий Петрович, Балакин Дмитрий Александрович, Фаломкина Олеся Владимировна, Чуличков Алексей Иванович
Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях — М.: Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2022. — 68 с.

В пособии рассмотрен новый математический формализм субъективного моделирования (МФСМ) как метод математического моделирования объектов исследования (Об. И.) в научных исследованиях. В исследовательской и творческой деятельности применение стандартного математического моделирования (СтММ) проблематично при использовании неполной и недостоверной информации, обычно высказанной в форме субъективных суждений. МФСМ позволяет моделировать субъективную информацию, научный опыт и интуицию модельера-исследователя (м.-и.), владеющего современными методами математического моделирования, включая МФСМ, и знакомого с предметной областью как ее исследователь. МФСМ позволяет моделировать Об. И., начиная с модели «абсолютного незнания», вплоть до «точного знания» модели, необходимого для применения СтММ.

Модель субъективных суждений модели Об. И. м.-и. задает как пространство с мерами правдоподобия и доверия, характеризующими *модальности* высказываний о модели: значение правдоподобия определяет, насколько, по мнению м.-и., *относительно* правдоподобна его истинность, а значение доверия определяет, насколько следует *относительно* доверять отрицанию, где «относительно» значит, что численные значения мер отличные от нуля и единицы, не имеют содержательной интерпретации, а имеет смысл лишь их упорядоченность. В пособии рассмотрены варианты мер правдоподобия и доверия, наследующих черты вероятности и психофизики. Показано, что МФСМ позволяет вычислять относительные правдоподобия и доверия истинности любых характеристик Об. И., обусловленных его субъективной моделью, а если м.-и. доступны данные наблюдений за Об. И., то МФСМ позволяет м.-и.: оценить адекватность своей субъективной модели цели исследования, изменять свою модель, комбинируя субъективные представления и данные наблюдений, и, наконец, — эмпирически восстановить модель Об. И.

Учебное пособие рассчитано на студентов старших курсов и аспирантов физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Авторы — сотрудники кафедры математического моделирования и информатики физического факультета МГУ.

Рецензенты: профессор кафедры математики П. В. Голубцов, заведующий кафедрой математики Н. Н. Нефёдов.

Предисловие

При восстановлении математической модели объекта исследования (Об. И.) модельеру-исследователю (м.-и.) важно использовать все доступные формализованные знания из соответствующей предметной области. Это он может сделать согласно определению возможностей м.-и. в аннотации. Однако при этом м.-и., гораздо сложнее, но не менее важно, использовать свои *обширные неформализованные знания, научный опыт и интуицию*, поскольку, как известно [20; 21], именно такие знания и интуиция нередко оказываются источником новых изобретений и открытий.

В учебном пособии речь пойдёт о типичной ситуации, в которой м.-и. восстанавливает математическую модель Об. И.: формализованная её часть готова, но остаются неопределёнными некоторые параметры модели, возможные значения некоторых м.-и. может охарактеризовать интервально, причём часть из них — достаточно точно, ещё часть — лишь вербально, а *о возможных значениях остальных м.-и. не знает ничего*, и вынужден *использовать свой научный опыт и интуицию исследователя*. В такой ситуации м.-и., знакомый с «проблемой мешающих параметров», см. [22], не может использовать СтММ, требующее точного знания всех параметров, особенно если о значениях параметров, м.-и. «знает что-то», причем всё — приближенно, то в рамках СтММ м.-и. не может сформулировать, что именно и насколько точно «он знает».

В пособии рассмотрен математический формализм субъективного моделирования (МФСМ) [1—4], позволяющий м.-и. в подобной ситуации полностью субъективно методами МФСМ «довосстановить» математическую модель, эмпирически проверить её адекватность цели исследования, уточнить и т. п., если ему доступны данные наблюдений Об. И. Решение задач, возникающих в МФСМ, иллюстрировано в учебном пособии новыми (по сравнению с [1—4]) примерами, см. практикум по субъективному моделированию.

Замечание. Поскольку меры правдоподобия Pl, доверия Bel и pl-, bel-интегралы относительно этих мер формально эквивалентны рассмотренным в [7] мерам возможности P, необходимости N и, соответственно, — p-, n-интегралам относительно этих мер, все результаты, относящиеся к мерам P, N и p-,n-интегралам, полученные в [7; 8], использованы в пособии.

Список сокращений и условных обозначений

$\in$	принадлежность
$\subset$	включение
$\cup$	объединение
$\cap$	пересечение
$\Leftrightarrow$	эквивалентность
$\sim$	определение функций; согласованность субъективной модели и наблюдения
$\setminus$	теоретико-множественная разность
$\mathcal{L}$ ($\hat{\mathcal{L}}$)	шкала значений правдоподобия (доверия), первый вариант мер правдоподобия и доверия
$\mathcal{L}'$	шкала значений правдоподобия, второй и третий варианты мер правдоподобия и доверия
$\hat{\mathcal{L}}'$	шкала значений доверия, третий вариант мер правдоподобия и доверия
Pl	мера правдоподобия
Bel	мера доверия
$t^{\widetilde{x}}$	распределение правдоподобий значений неопределенного элемента $\widetilde{x}$
$\widehat{t^{\widetilde{x}}}$	распределение доверий значений неопределенного элемента $\widetilde{x}$

ЗБЧ	закон больших чисел
м.-и.	модельер-исследователь
МФСМ	математический формализм субъективного моделирования
но. в.	неопределенное высказывание
но. м.	неопределенное множество
НО. НЧ. О.	неопределенный нечеткий объект
но. э.	неопределенный элемент
нч. э.	нечеткий элемент
Об. И.	объект исследования
п. н.	почти наверное
сл. э.	случайный элемент
СтММ	стандартное математическое моделирование

Ст. О.	стохастический объект
эл. в.	элементарное высказывание

Оглавление

Глава 1

Математические основы

1.1 Меры правдоподобия Pl и доверия Bel. Неопределенный элемент (но. э.) $\widetilde{x}$, субъективная модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ «неопределённости»

Рассмотрим пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в котором $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to L$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{L}$ (где $L = ([0,1], \leqslant, +, \times) = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$ и $\widehat{L} = (\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]}, \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = ([0,1], \geqslant, \min, \max)$ суть *шкалы их значений*, см. [7, §1.3]), где бинарные операции сложения и умножения ассоциативны и взаимно дистрибутивны, а меры *заданы* м.-и. следующими равенствами $\forall\, E \in \mathcal{P}(X)$:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathop{+}_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x) = \sup_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x),\ E \neq \varnothing,\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0,\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1, \\
\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathop{\widehat{+}}_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) = \inf_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x),\ E \neq X,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0,
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

в которых $E = \bigcup_{x \in E} \{x\} = \bigcap_{x \in X \setminus E} (X \setminus \{x\})$,

$$
\begin{gathered}
t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x),\ x \in X,\ \mathop{+}_{x \in X} t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1, \\
\widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x),\ x \in X,\ \mathop{\widehat{+}}_{x \in X} \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0,
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

см. рис. 1.1. Согласно (1.2) функции $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to L$ и $\widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$ *определены* мерами $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и называются *распределениями правдоподобий и доверий значений* неопределенного элемента (но. э.) $\widetilde{x}$. С другой стороны, но. э. $\widetilde{x}$, будучи *заданным м.-и. распределениями* (1.2), *определяет* равенствами (1.1) *меры* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и поэтому называется *каноническим* для пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, а последнее *называется его моделью.*

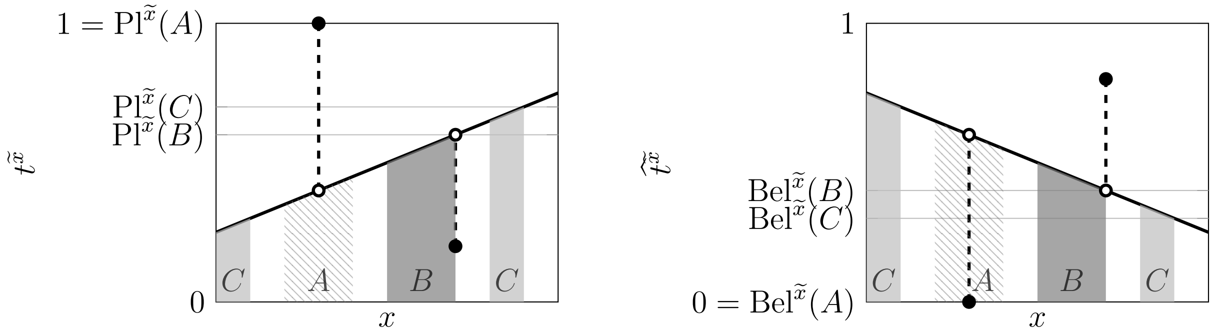


Рис. 1.1: Пример вычисления значений мер правдоподобия Pl и доверия Bel заданных множеств A, B, C (A, B — отрезки, C — объединение двух отрезков) по их заданным распределениям $t^{\widetilde{x}}$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}$, соответственно. $t^{\widetilde{x}}$ ($\widehat{t^{\widetilde{x}}}$) — распределение правдоподобия (доверия), определяющее меру правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ (меру доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$). Вычисленные согласно формуле (1.1) правдоподобия (доверия) этих множеств показаны горизонтальными линиями

1.2 Но. э. как неопределенная высказывательная переменная

В рассматриваемом контексте но. э. $\widetilde{x}$ моделирует субъективные суждения м.-и. как его *неопределенные высказывания (но. в.)* о значениях неизвестного параметра $x \in X$ и их *модальности*, характеризующие его субъективные представления об их *истинности.* Такая интерпретация но. э. $\widetilde{x}$ основана на *теоретико-множественном представлении логики высказываний*, согласно которому в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$: X — множество элементарных высказываний (эл. в.), аналогичное множеству элементарных событий в теории вероятностей, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех высказываний, аналогичный классу событий в теории вероятностей, в котором любое высказывание a взаимно однозначно *представлено* множеством $A \in \mathcal{P}(X)$ тех эл. в. $x \in X$, каждое из которых влечет a: $a \leftrightarrow A = \bigcup\limits_{x \in X,\, x \to a} \{x\}$, где $\leftrightarrow$ и $\to$ суть взаимно однозначное соответствие и логическая импликация. Каждое эл. в. x *представлено* в X множеством $\{x\}$, $x \leftrightarrow \{x\}$, и *выделено* условием, согласно которому любое эл. в. $x \in X$ не следует ни из какого высказывания, кроме x и всегда ложного $\mathbf{0}$.

Если $a \leftrightarrow A$, $b \leftrightarrow B$, то $a \,\&\, b \leftrightarrow A \cap B$, $a \vee b \leftrightarrow A \cup B$, $\neg a \leftrightarrow X \setminus A$, $a \to b \equiv (\neg a) \vee b \leftrightarrow (X \setminus A) \cup B$, $\mathbf{1} \leftrightarrow X$, $\mathbf{0} \leftrightarrow \varnothing$, где & — символ конъюнкции, $\wedge$ — символ дизъюнкции, $\neg$ — символ отрицания.

Интерпретация: $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ ($\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A)$) — *относительное правдоподобие истинности* но. в. (субъективного суждения), *согласно которому* $\widetilde{x} = x$ ($\widetilde{x} \in A$), где $x \leftrightarrow \{x\}$ ($a \leftrightarrow A$); $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A)$) — *относительное доверие истинности* но. в., согласно которому $\widetilde{x} \in X \setminus \{x\}$ $(\widetilde{x} \in A)$, где $\neg x \leftrightarrow X \setminus \{x\}$ $(a \leftrightarrow A)$, $x \in X$.

1.3 Группа $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов и группа $\overline{\overline{\Gamma}}$ изоморфизмов шкал L и $\widehat{L}$. Принцип относительности. Координатные представления шкал L и $\widehat{L}$

Сформулируем условия, *определяющие* меры правдоподобия Pl, доверия Bel (1.1) и шкалы L, $\widehat{L}$ их значений:

- м.-и. *всегда может предложить модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ но. э.[1] $\widetilde{x}$, выразив в (1.2), насколько, по его мнению, *относительно правдоподобны* равенства (высказывания) $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, и насколько *следует относительно доверять* неравенствам $\widetilde{x} \neq x$ (их отрицаниям), $x \in X$. «Относительно» означает, что в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$
- *численные значения* мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$, $E \in \mathcal{P}(X)$, в (1.1), *отличные от* 0 *и* 1, *не могут быть содержательно истолкованы. Существенна лишь их упорядоченность*;
- меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$ *эквивалентны*, если $\exists\, \gamma(\cdot), \widehat{\gamma}(\cdot) \in \Gamma\colon \forall\, E \in \mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$, $\widehat{\gamma}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)$, где Γ — *группа* непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon\ [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, с групповой операцией «$\circ$», определенной равенствами $(\gamma \circ \gamma')(a) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$.

Согласно этим условиям:

1. группа Γ определяет *группу* $\overline{\Gamma}$ *изотонных автоморфизмов* $\gamma\colon L \to L$, $\widehat{\gamma}\colon \widehat{L} \to \widehat{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, *шкал* $L = ([0,1], \leqslant, +, \times)$, $\widehat{L} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. Это означает, что

$$\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma\ \ \forall\, a, b \in [0,1]\ \ \gamma[0,1] = [0,1],\ \gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b), \tag{1.3}$$

где $*$ — символ любой из *операций* $+$, $\widehat{+}$, $\times$, $\widehat{\times}$, и выполнены эквивалентности $\Leftrightarrow$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b),\ a \,\widehat{\leqslant}\, b \Leftrightarrow \gamma(a) \,\widehat{\leqslant}\, \gamma(b); \tag{1.4}$$

в свою очередь равенства, *определяющие бинарные операции в шкалах* L и $\widehat{L}$,

$$a + b = \max\{a,b\},\ a \times b = \min\{a,b\},\ a \,\widehat{+}\, b = \min\{a,b\},\ a \,\widehat{\times}\, b = \max\{a,b\},\quad a, b \in [0,1], \tag{1.5}$$

следуют из условий (1.3), (1.4), *непрерывности* и коммутативности операций $*\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, требований $\forall\, a, b \in [0,1]$ $a \leqslant b \Leftrightarrow b \,\widehat{\leqslant}\, a$ и следующих *свойств* 0 и 1:

[1] Это условие гарантирует эффективность МФСМ, его *безусловную* применимость, см. § 1.4.

$\forall\, a \in [0,1]$ $a + 0 = a \mathbin{\widehat{\times}} 0 = a \times 1 = a \mathbin{\widehat{+}} 1 = a$, $a + 1 = a \mathbin{\widehat{\times}} 1 = 1$ и $a \times 0 = a \mathbin{\widehat{+}} 0 = 0$; согласно этим условиям $L = ([0,1], \leqslant, +, \times)$, $\widehat{L} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]}, \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, где $\widehat{0} = 1$, $\widehat{1} = 0$, $\widehat{\leqslant} \Leftrightarrow \geqslant$ и $\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]} = [0,1]$, см. [7, §1.3].

2. Группа Γ определяет и *группу* $\overline{\overline{\Gamma}}$ *изоморфизмов* $\gamma\colon L \to \gamma L$, $\widehat{\gamma}\colon \widehat{L} \to \widehat{\gamma}\widehat{L}$, где все шкалы γL, $\gamma \in \overline{\overline{\Gamma}}$ и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\widehat{\gamma} \in \overline{\overline{\Gamma}}$, *изоморфны.*

Это означает, что $\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma$ $\forall\, a \in L, \widehat{L} \Leftrightarrow \gamma(a) \in \gamma L, \gamma\widehat{L}$, а бинарные операции $*$ и отношения $\leqslant, \widehat{\leqslant}$ в *шкалах* γL и $\gamma\widehat{L}$ *определены* равенствами (1.3) и эквивалентностями (1.4), а именно: $a * b \in L, \widehat{L} \to \gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b) \in \gamma L, \gamma\widehat{L}$, $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$, $a \widehat{\leqslant} b \Leftrightarrow \gamma(a) \widehat{\leqslant} \gamma(b)$, $a, b \in L, \widehat{L}$.

Следствием условия 2 является *принцип относительности*, подобный принципу относительности в физике, согласно которому все шкалы $\gamma\, L$, $\gamma \in \overline{\overline{\Gamma}}$, и $\widehat{\gamma}\, \widehat{L}$, $\widehat{\gamma} \in \overline{\overline{\Gamma}}$ как *координатные представления*[1] *шкал* L и $\widehat{L}$:

- *изоморфны*, и м.-и. могут формулировать (субъективные) модели в шкалах γL, $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, выбрав произвольные $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\overline{\Gamma}}$. Заметим, что для любых значений мер $\mathrm{Pl}(A) \in (0,1)$, $\mathrm{Bel}(B) \in (0,1)$ м.-и. могут выбрать преобразования $\gamma(\cdot)$ и $\widehat{\gamma}(\cdot)$ так, чтобы значения *эквивалентных* им мер $\gamma(\mathrm{Pl}(A))$ и $\widehat{\gamma}(\mathrm{Bel}(B))$ оказались сколь угодно близки к нулю или к единице «почти всюду» в эквивалентных им шкалах γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, см. рис. 1.2;

- сформулированные в парах шкал L', $\widehat{L}'$ и L'', $\widehat{L}''$, модели считаются *эквивалентными*, если *существует* пара шкал $L = \gamma' L' = \gamma'' L''$ и $\widehat{L} = \widehat{\gamma}'\widehat{L}' = \widehat{\gamma}''\widehat{L}''$, $\gamma', \gamma'', \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}'' \in \overline{\overline{\Gamma}}$, в которых их формулировки совпадают;

- *содержательно истолкованы* могут быть только те модели, формулировки которых *не зависят* от выбора шкал γL, $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, т. е. одинаковы для всех исследователей. Например, равенства значений правдоподобия и доверия нулю или единице не зависят от выбора шкал γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, ра́вно как и неравенства двух значений правдоподобия или доверия, в отличие от равенств $\mathrm{Pl}(A) = a$ или $\mathrm{Bel}(B) = b$, которые при любых $a, b \in (0,1)$ могут быть нарушены выбором шкал γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$.

1.4 Субъективные модели «абсолютного незнания» и «точного знания»

Чтобы м.-и. всегда мог предложить модель неопределённости субъективных суждений, он должен уметь моделировать «абсолютное незнание» и «точное знание» моделируемого Об. И. В данном случае м.-и. *всегда может* предложить модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ но. э.

[1]«Координаты» $a, \widehat{a} \in [0,1]$ в $L, \widehat{L}$ заданы «координатами» $\gamma(a), \widehat{\gamma}(\widehat{a}) \in [0,1]$ в $\gamma L, \widehat{\gamma}\widehat{L}$

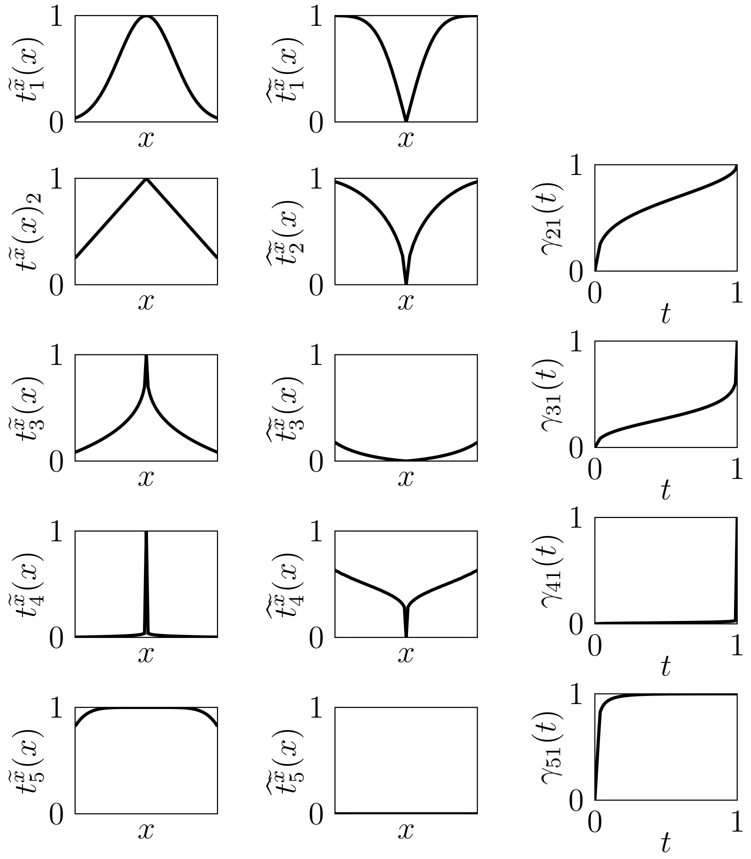


Рис. 1.2: Примеры эквивалентных распределений правдоподобий $t_1^{\widetilde{x}}$, $t_2^{\widetilde{x}}$, $t_3^{\widetilde{x}}$, $t_4^{\widetilde{x}}$, $t_5^{\widetilde{x}}$ (слева) и доверий $\widehat{t_1^{\widetilde{x}}}$, $\widehat{t_2^{\widetilde{x}}}$, $\widehat{t_3^{\widetilde{x}}}$, $\widehat{t_4^{\widetilde{x}}}$, $\widehat{t_5^{\widetilde{x}}}$ (в центре) и функций $\gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{41}, \gamma_{51}$, преобразующих эти распределения (справа) при преобразовании шкал

$\widetilde{x}$, ибо когда он «ничего не знает» об Об. И. и о его модели или «доподлинно знает всё», ему следует воспользоваться инвариантными относительно выбора шкал γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, моделями:

- «*абсолютного незнания*» модели Об. И., задав $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ распределениями: $t^{\widetilde{x}}(x) = 1$, $x \in X$, все значения но. э. $\widetilde{x}$ равноправдоподобны, $\sup\limits_{x \in X} t^{\widetilde{x}}(x) = 1$, $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = 0$, $x \in X$, любому неравенству $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$, доверять нельзя, $\inf\limits_{x \in X} \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = 0$, см. рис. 1.3.

  В этом случае $\forall\, \varphi(\cdot)\colon X \to Y$ в (1.6) для $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$ $t^{\widetilde{y}}(y) = 1$, $\widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = 0$, $y \in Y$, т. е. *«абсолютное незнание» модели влечёт «абсолютное незнание» любого ее следствия*;

- «*точного знания*» модели Об. И., задав $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ распределениями: $t^{\widetilde{x}}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0, \end{cases}$ $x \in X$, x_0 — единственное правдоподобное значение $\widetilde{x}$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) = \begin{cases} 1, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases}$ $x \in X$, x_0 — единственное значение, при котором неравенству $\widetilde{x} \neq x_0$ доверять нельзя, см. рис. 1.4; при этом в (1.6) для любого следствия модели $\forall\, \varphi(\cdot)\colon X \to Y$ $\; t^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y = y_0, \\ 0, & y \neq y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, $\widehat{t}^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y \neq y_0, \\ 0, & y = y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, где $y_0 = \varphi(x_0)$, т. е. *«абсолютное знание» модели влечёт «абсолютное знание» любого её следствия.*

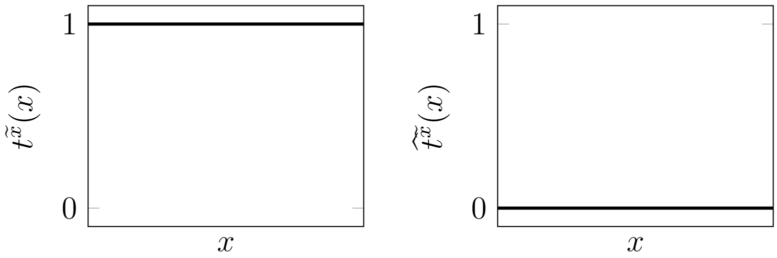


Рис. 1.3: Пример распределений правдоподобий и доверий, моделирующих «абсолютное незнание» модели Об. И., согласно которым все значения но. э. $\widetilde{x}$ одинаково правдоподобны и любому неравенству $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$, доверять нельзя

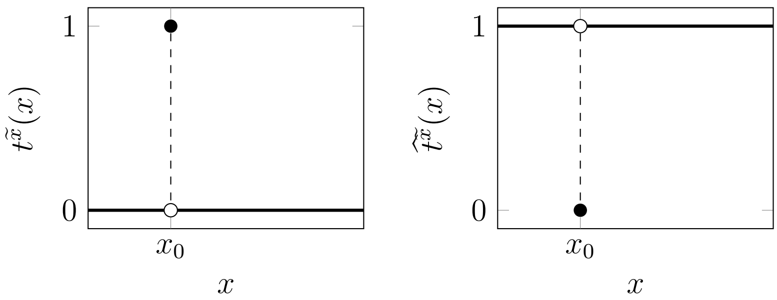


Рис. 1.4: Пример распределений правдоподобий и доверий, моделирующих «точное знание» модели Об. И., где x_0 — единственное правдоподобное значение $\widetilde{x}$ и единственное значение, при котором неравенству $\widetilde{x} \neq x$ доверять нельзя

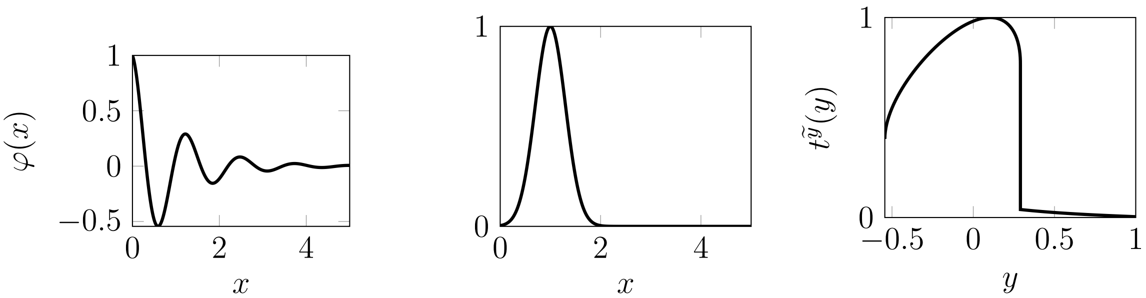
Замечание 1.4.1. В связи с пунктом 1.4 отметим один из альтернативных методов субъективного моделирования, известный как байесовский [23—28], в котором субъект задаёт вероятность $\mathrm{Pr}^{\widetilde{x}}$, значение плотности $\mathrm{pr}^{\widetilde{x}}(x)$ которой интерпретирует как *степень его уверенности в истинности равенства* $\widetilde{x} = x$, $x \in X$. Вероятность $\mathrm{Pr}^{\widetilde{x}}$ «уточняется» путём байесовского пересчёта, учитывающего данные наблюдений за моделируемым объектом, подробнее см. в [27]. Основной недостаток: *невозможно моделировать «абсолютное* *незнание»* модели, ибо любой выбор $\mathrm{Pr}^{\widetilde{x}}$, например, по принципу недостаточного основания Лапласа (равномерное распределение), максимальной энтропии [29], распределения Джеффриса [30] и др. [31; 32], моделирующий в байесовском методе «априорное незнание», на самом деле *есть априорное знание модели, определенное знанием вероятности* $\mathrm{Pr}^{\widetilde{x}}$. Следствием этого является тот факт, что «априорное незнание» модели не влечёт «незнания» свойств Об. И., обусловленных его моделью. Альтернативные модели «абсолютного незнания» предложены в [33—39], см. замечание 2.1.2.

1.5 Правдоподобия и доверия истинности характеристик Об. И., обусловленных его субъективной моделью. Неопределенное множество

Любая функция $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$ задает но. э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$ со значениями в Y и пространство $\big(Y, \mathcal{P}(Y),\, \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}\big)$, в котором $\forall\, A \in \mathcal{P}(Y)$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \sup_{y \in A} t^{\widetilde{y}}(y),\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \inf_{y \in Y \setminus A} \widehat{t}^{\widetilde{y}}(y), \tag{1.6}$$

где $\forall\, y \in Y\ \ t^{\widetilde{y}}(y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) = y) = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \varphi(x) = y}} t^{\widetilde{x}}(x),\ \widehat{t}^{\widetilde{y}}(y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \neq y) = \inf\limits_{\substack{x \in X \\ \varphi(x) = y}} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)$ — *правдоподобие и доверие истинности но. в., согласно которым* $\varphi(\widetilde{x}) = y$ и $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$, см. рис. 1.5.



(а) Функция φ (б) Распределение $t^{\widetilde{x}}$ неопределенного параметра $\widetilde{x}$ (в) Распределение $t^{\widetilde{y}}$ но. э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$

Рис. 1.5: Пример (в) распределения правдоподобий неопределенной характеристики Об. И., заданной (а) функцией φ (б) неопределенного параметра $\widetilde{x}$ модели Об. И. Исследователь знает распределение неопределенного параметра $\widetilde{x}$ и функцию φ, связывающую значение параметра и значение следствия модели, и вычисляет распределение правдоподобий $t^{\widetilde{y}}$ по формуле (1.6)

Если $A^{\boldsymbol{\cdot}}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ и $A_{\boldsymbol{\cdot}}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ — взаимно обратные (многозначные) отображения: $\forall\, x \in X\ A^x = \{y \in Y,\ x \in A_y\}$, $\forall\, y \in Y\ A_y = \{x \in X,\ y \in A^x\}$, то образ $A^{\widetilde{x}}$ но. э. $\widetilde{x}$ есть *неопределенное множество (но. м.)*, заданное на $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $\mathcal{P}(Y)$. *Индикаторные функции одноточечного покрытия* $A^{\widetilde{x}}$ суть:

$$t^{A^{\widetilde{x}}}(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y),\ y \in Y,\ \widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y),\ y \in Y; \tag{1.6*}$$

$t^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ и $\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ — *правдоподобие и доверие истинности но. в., согласно которому* $\widetilde{x} \in A_y$ или, что эквивалентно, $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$.

Исходя из своей модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ но. э. $\widetilde{x}$, м.-и. может *вычислять* относительные правдоподобия и доверия истинности *любых* своих субъективных суждений о значениях *любых* характеристик Об. И. как функций но. э. $\widetilde{x}$. Если $M(\widetilde{x})$ — *субъективная модель* Об. И., предложенная м.-и. вместо семейства $M(x)$, $x \in X$, то для любой неопределенной характеристики $\varphi(\widetilde{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi(M(\widetilde{x}))$ или $A^{\widetilde{x}} = \mathrm{F}(M(\widetilde{x}))$ Об. И., *обусловленной его моделью* $M(\widetilde{x})$, правдоподобие и доверие истинности но. в., согласно которому: $\varphi(\widetilde{x}) = y$, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$ или $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$, определены в (1.6), (1.6*). При этом пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ можно использовать как *математическую основу компьютерного интерфейса*, обеспечивающего «интеллектуальный диалог» м.-и. с моделью Об. И., позволяющего м.-и. *вычислять* значения мер правдоподобия и доверия истинности *любых свойств* Об. И., обусловленных его субъективной моделью $M(\widetilde{x})$.

Замечание 1.5.1. Первая публикация по § 1.1–1.5 — [9]. Методы субъективного моделирования, предложенные в работах [20; 21; 23; 24; 33—41], существенно отличаются от опубликованных в [9]. Альтернативные методы математического моделирования неопределённости и определения мер правдоподобия и доверия рассмотрены в [37; 40].

1.6 Интегрирование относительно мер правдоподобия и доверия; интегралы относительно этих мер

Обозначим $L(X)$ $(\widehat{L}(X))$ класс функций $g(\cdot)\colon X \to L$ $(\widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{L})$ с операциями $(g_1 * g_2)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_1(x) * g_2(x)$, $x \in X$, $((\widehat{g}_1 \widehat{*} \widehat{g}_2)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{g}_1(x) \widehat{*} \widehat{g}_2(x)$, $x \in X)$, где $*$ $(\widehat{*})$ — любая из операций $+$, $\times$ $(\widehat{+}$, $\widehat{\times})$. Далее $L(X)$ $(\widehat{L}(X))$ суть *классы всех функций с бинарными операциями* $+$, $\times$ $(\widehat{+}$, $\widehat{\times})$, *отношениями* $\leqslant$ $(\widehat{\leqslant})$ и со значениями в L $(\widehat{L})$, соответственно.

Определение 1.6.1. Назовем pl- (bel-) интегралом функцию $\mathrm{pl}(\cdot)\colon L(X) \to L$ $(\mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{L}(X) \to \widehat{L})$

- однородную: $\forall\, a \in [0,1]\ \forall\, g(\cdot)\colon X \to L\ \mathrm{pl}((a \times g)(\cdot)) \equiv \mathrm{pl}(a \times g(\cdot)) = a \times \mathrm{pl}(g(\cdot))$, где в левой части равенства $(a \times g)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a \times g(x)$, $x \in X$, $(\forall\, a \in [0,1]\ \forall\, \widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$ $\mathrm{bel}((\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{g})(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}(\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{g}(\cdot)) = \widehat{a} \widehat{\times} \mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)))$, и

- *вполне*[1] аддитивную: $\forall\, g_j(\cdot)\colon X\to L,\ j\in J,\ \mathrm{pl}((\underset{j\in J}{+} g_j)(\cdot)) = \underset{j\in J}{+}\mathrm{pl}(g_j(\cdot))$ $(\forall\,\widehat{g}_j(\cdot)\colon X\to \widehat{L},\ j\in J,\ \mathrm{bel}((\underset{j\in J}{\widehat{+}}\widehat{g}_j)(\cdot)) = \underset{j\in J}{\widehat{+}}\mathrm{bel}(\widehat{g}_j(\cdot)))$, где J — произвольное множество индексов.

Определим меры $\mathrm{Pl}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X)\to L$ и $\mathrm{Bel}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X)\to \widehat{L}$, *согласованные* соответственно с pl- и bel-интегралами, равенствами: $\forall\, E\in\mathcal{P}(X)\ \mathrm{Pl}(E)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{pl}(\chi_E(\cdot))$ и $\mathrm{Bel}(E)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{bel}(\widehat{\chi}_E(\cdot))$, где $\chi_E(x)=1,\ x\in E,\ \chi_E(x)=0,\ x\in X\backslash E,$ — индикаторная функция E, $\widehat{\chi}_E(\cdot)=\theta\circ\chi_{X\backslash E}(\cdot)$, $\theta(\cdot)\in\Theta$; Θ — здесь и далее класс непрерывных строго монотонных функций $\theta(\cdot)\colon[0,1]\to[0,1]$, $\theta(0)=1$, $\theta(1)=0$. В этом новом определении мер Pl, Bel они определены не непосредственно, а при помощи pl- и bel-интегралов.

Теорема 1.6.1. $\forall\,\mathrm{pl}(\cdot)\colon L(X)\to L\ \ \exists\, t(\cdot)\colon X\to L\ \ \forall\, g(\cdot)\colon X\to L$

$$\mathrm{pl}(g(\cdot)) = \sup_{x\in X}\min\{t(x),g(x)\}\equiv \underset{x\in X}{+}(t(x)\times g(x))\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{pl}_t(g(\cdot)); \tag{1.7}$$

$\forall\,\mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{L}(X)\to\widehat{L}\ \ \exists\,\widehat{t}(\cdot)\colon X\to\widehat{L}\ \ \forall\,\widehat{g}(\cdot)\colon X\to\widehat{L}$

$$\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \inf_{x\in X}\max\{\widehat{t}(x),\widehat{g}(x)\}\equiv \underset{x\in X}{\widehat{+}}(\widehat{t}(x)\widehat{\times}\widehat{g}(x))\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot)). \tag{1.8}$$

Действительно, для любых функций $g(\cdot)\colon X\to L$, $\widehat{g}(\cdot)\colon X\to\widehat{L}$ имеют место «интегральные представления» [7; 10]: $g(x)=\sup\limits_{y\in X}\min\{g(y),\chi_{\{y\}}(x)\}\equiv \underset{y\in X}{+}(g(y)\times\chi_{\{y\}}(x))$, $\widehat{g}(x)=\inf\limits_{y\in X}\max\{\widehat{g}(y),\widehat{\chi}_{X\backslash\{y\}}(x)\}\equiv\underset{y\in X}{\widehat{+}}(\widehat{g}(y)\widehat{\times}\widehat{\chi}_{X\backslash\{y\}}(x))$, $x\in X$. В самом деле, при $y\neq x$ из $\chi_y(x)=0$ следует $\min\{g(y),\chi_y(x)\}=0$, а при $y=x$ из $\chi_y(x)=1$ следует $\min\{g(y),\chi_y(x)\}=g(x)$. Поэтому, в силу *однородности и полной аддитивности* pl- и bel-интегралов, $\mathrm{pl}(g(\cdot))=\underset{y\in X}{+}(g(y)\times\mathrm{pl}(\chi_{\{y\}}(\cdot)))\equiv\underset{y\in X}{+}(g(y)\times t(y))\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{pl}_t(g(\cdot))$, где $t(y)=\mathrm{pl}(\chi_{\{y\}}(\cdot))=\mathrm{pl}_t(\chi_{\{y\}}(\cdot))\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Pl}_t(\{y\})$, $y\in X$; $\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot))=\underset{y\in X}{\widehat{+}}(\widehat{g}(y)\widehat{\times}\mathrm{bel}(\widehat{\chi}_{X\backslash\{y\}}(\cdot)))\equiv\underset{y\in X}{\widehat{+}}(\widehat{g}(y)\,\widehat{\times}\,\widehat{t}(y))\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot))$, где $\widehat{t}(y)=\mathrm{bel}(\widehat{\chi}_{X\backslash\{y\}}(\cdot))=\mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{\chi}_{X\backslash\{y\}}(\cdot))\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(X\setminus\{y\})$, $y\in X$.

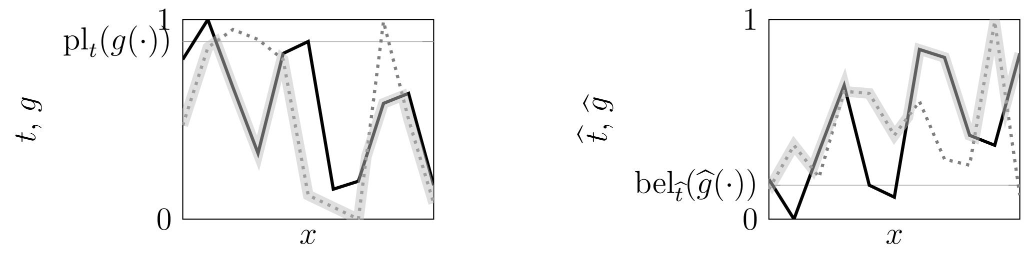
Следствие 1.6.1. *Из определения 1.6.1 и теоремы 1.6.1 следуют:*

- *равенства (1.1) для мер* Pl *и* Bel*:* $\forall\, E\in\mathcal{P}(X)\ \mathrm{Pl}(E)=\mathrm{pl}_t(\chi_E(\cdot))\overset{def}{=}\mathrm{Pl}_t(E)=\underset{x\in E}{+}t(x)$, $\mathrm{Bel}(E)=\mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{\chi}_E(\cdot))\overset{def}{=}\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E)=\underset{x\in X\backslash E}{\widehat{+}}\widehat{t}(x)$*;*

- *полная аддитивность мер* Pl_t *и* $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}$*:* $\mathrm{Pl}_t(\bigcup\limits_{j\in J}E_j)\overset{def}{=}\mathrm{pl}_t(\chi_{\bigcup_{j\in J}E_j}(\cdot))\equiv\mathrm{pl}_t((\underset{j\in J}{+}\chi_{E_j})(\cdot))=\underset{j\in J}{+}\mathrm{Pl}_t(E_j)$, $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(\bigcap\limits_{j\in J}E_j)\overset{def}{=}\mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{\chi}_{\bigcap_{j\in J}E_j}(\cdot))\equiv\mathrm{bel}_{\widehat{t}}((\underset{j\in J}{\widehat{+}}\widehat{\chi}_{E_j})(\cdot))=\underset{j\in J}{\widehat{+}}\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E_j)$, *и тот факт, что*

- $\mathrm{pl}_t(g(\cdot))$ *и* $\mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot))$ *суть интегралы от функций* $g(\cdot)\in L(X)$ *и* $\widehat{g}(\cdot)\in\widehat{L}(X)$ *относительно мер* $\mathrm{Pl}_t(E)=\underset{x\in E}{+}t(x)$ *и* $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E)=\underset{x\in X\backslash E}{\widehat{+}}\widehat{t}(x)$.

[1] В отличие от интеграла Лебега, в котором используется лишь *счетная* аддитивность.



(а) pl-интеграл (б) bel-интеграл

Рис. 1.6: Пример интегрирования относительно мер (а) правдоподобия и (б) доверия. Сплошная линия — заданное распределение правдоподобий t (распределение доверий $\widehat{t}$), пунктир — заданная интегрируемая функция g ($\widehat{g}$). Выделены значения функции $(t \times g)(\cdot)$ ($(\widehat{t\times}\widehat{g})(\cdot)$), точной верхней (нижней) гранью которой определяется искомое значение интеграла, показанное горизонтальной линией

1.7 Независимость и субъективная независимость

Переформулируем в терминах мер Pl и Bel определения независимости в терминах мер возможности P и необходимости N [7]. Пусть $\widetilde{y}$ — но. э., канонический для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}_Y, \mathrm{Bel}_Y) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$, т. е. $\forall B \in \mathcal{P}(Y)$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in B) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}_Y(B)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in B) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}_Y(B)$, и $q_i(\cdot)\colon Y \to X_i$, $i = 1, \dots, n$, — заданные функции.

Определение 1.7.1.[1]

Но. э. $\widetilde{x}_i = q_i(\widetilde{y})$, $i = 1, \dots, n$, со значениями в X_i, $i = 1, \dots, n$, взаимно $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}$-независимы, если правдоподобие события: $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ $\widetilde{x}_i = x_i$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}\big((\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) = (x_1, \dots, x_n)\big) = t^{\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n}(x_1, \dots, x_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} t^{\widetilde{x}_i}(x_i) = \bigtimes_{1 \leqslant i \leqslant n} t^{\widetilde{x}_i}(x_i), \tag{1.9}$$

взаимно $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}$-независимы, если доверие события: $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ $\widetilde{x}_i \neq x_i$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}\big((\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) \neq (x_1, \dots, x_n)\big) = \widehat{t}^{\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n}(x_1, \dots, x_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \widehat{t}^{\widetilde{x}_i}(x_i) = \widehat{\bigtimes_{1 \leqslant i \leqslant n}} \widehat{t}^{\widetilde{x}_i}(x_i), \tag{1.10}$$

где $t^{\widetilde{x}_i}(x_i) = \sup\{t^{\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n}(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1 \in X_1, \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \dots, x_n \in X_n\}$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}_i}(x_i) = \inf\{\widehat{t}^{\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n}(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1 \in X_1, \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \dots, x_n \in X_n\}$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$.

События $B_i \in \mathcal{P}(Y)$, $i = 1, \dots, n$, взаимно Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, если

$$\mathrm{Pl}_Y\Big(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i\Big) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{Pl}_Y(B_i) = \bigtimes_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{Pl}_Y(B_i) \ \Big(\mathrm{Bel}_Y\Big(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i\Big) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{Bel}_Y(B_i) = \widehat{\bigtimes_{1 \leqslant i \leqslant n}} \mathrm{Bel}_Y(B_i)\Big). \tag{1.11}$$

[1]Определение формально эквивалентно определению независимости нечётких элементов в [7].

Если меры $\mathrm{Pl}_Y(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}_Y(\cdot)$ *дуально согласованы*, т. е. доверие события A есть неправдоподобие события «не A», $\exists\,\theta(\cdot) \in \Theta$ $\mathrm{Bel}_Y(A) = \theta(\mathrm{Pl}_Y(Y \setminus A))$, $A \in \mathcal{P}(Y)$, то Pl_Y- *и* Bel_Y*-независимости эквивалентны*, а события $B_1, \ldots, B_n$ в (1.11) и но. э. $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ в (1.9), (1.10) — *взаимно независимы.*

Независимость но. э. и но. м. определяется подобно независимости нечеткого элемента и нечеткого множества в [7]. Заметим, что

- если $z_i(\cdot)\colon X_i \to Z_i$, $i = 1, \ldots, n$, — любые функции, и но. э. $\widetilde{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, взаимно Pl- (Bel-) независимы, то взаимно Pl- (Bel-) независимы и но. э. $\widetilde{z}_i = z_i(\widetilde{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

- Но. э. $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$, заданные на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}_Y, \mathrm{Bel}_Y)$, со значениями в $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$, …, $(X_n, \mathcal{P}(X_n))$ взаимно Pl- (Bel-) независимы, если и только если $\forall\, A_j \in \mathcal{P}(X_j)$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i \in A_i\}) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_i \in A_i)\ \big(\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i \in A_i\}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_i \in A_i)\big). \tag{1.12}$$

- Если но. э. $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ взаимно $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}$- ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}$-) независимы, то правдоподобия (доверия) событий $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i \in A_i\}$ и $\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\widetilde{x}_i \in A_i\}$ *определяются* правдоподобиями (довериями) событий $\widetilde{x}_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$.

- Если события B_i, $i = 1, \ldots, n$, взаимно Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то правдоподобие (доверие) событий $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} B_i$ и $\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant n} B_i$ *определяются* правдоподобиями (довериями) событий B_i, $i = 1, \ldots, n$.

Согласно последним замечаниям естественны следующие определения *субъективной независимости*, «интуитивно более понятные», чем данные в определении 1.7.1.

Определение 1.7.2. События $B_1, \ldots, B_n$ ($B'_1, \ldots, B'_n$) назовём взаимно субъективно Pl_Y- (Bel_Y-) независимыми, если существует непрерывная функция $f(\cdot)\colon [0,1]^n \to [0,1]$ ($f'(\cdot)\colon [0,1]^n \to [0,1]$), такая, что

$$\mathrm{Pl}_Y(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} B_i) = f(\mathrm{Pl}_Y(B_1), \ldots, \mathrm{Pl}_Y(B_n))\ \ (\mathrm{Bel}_Y(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} B'_i) = f'(\mathrm{Bel}_Y(B'_1), \ldots, \mathrm{Bel}_Y(B'_n))) \tag{1.13}$$

Проверим, что *взаимная и взаимная субъективная независимости эквивалентны.* Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Если B_1 и B_2 (B'_1 и B'_2) Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то они и субъективно независимы, ибо в (1.13) $f(\cdot,\cdot) = \min\{\cdot,\cdot\}$ ($f'(\cdot,\cdot) = \max\{\cdot,\cdot\}$). Поскольку события B_1 и $\varnothing$, B_1 и Y (B'_1 и $\varnothing$, B_1 и Y) при любом B_1 (B'_1) Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то B_1 и $\varnothing$, B_1 и Y (B'_1 и $\varnothing$, B'_1 и Y) Pl_Y- (Bel_Y-) независимы и субъективно, т. е. в (1.13) 1. $f(b_1, 0) = 0$, $f(b_1, 1) = b_1$ ($f'(b'_1, 0) = b'_1$, $f'(b'_1, 1) = 1$). Если же B_1

и B_2 (B'_1 и B'_2) субъективно Pl_Y- (Bel_Y-) независимы, то в (1.13) 2. $f(b_1, b_2) = f(b_2, b_1)$ ($f'(b'_1, b'_2) = f'(b'_2, b'_1)$), где $b_i = \mathrm{Pl}_Y(B_i)$ ($b'_i = \mathrm{Bel}_Y(B'_i)$), $i = 1, 2$. Наконец, согласно (1.13) 3. для любых $b_1, b_2 \in [0, 1]$ ($b'_1, b'_2 \in [0, 1]$) и для любого $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ $\gamma \circ f(b_1, b_2) = f(\gamma(b_1), \gamma(b_2))$ ($\gamma \circ f'(b'_1, b'_2) = f'(\gamma(b'_1), \gamma(b'_2))$) Согласно 1., 2., и 3. для любых $b_1, b_2, b'_1, b'_2 \in [0, 1]$ выполнены условия теоремы 1.1 в [7], следовательно, $f(\cdot, \cdot) = \min\{\cdot, \cdot\}$, $f'(\cdot, \cdot) = \max\{\cdot, \cdot\}$.

Определение 1.7.3. Неопределённые элементы $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ назовем взаимно субъективно $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}$- ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}$-) независимыми, если существует непрерывная функция $f(\cdot)\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$ ($f'(\cdot)\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$) такая, что $\forall A_j \in \mathcal{P}(X_j)$, $j = 1, \ldots, n$, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\widetilde{x}_i \in A_i\}) = f(\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_1 \in A_1), \ldots, \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_n \in A_n))$ ($\forall A'_j \in \mathcal{P}(X_j)$, $j = 1, \ldots, n$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\widetilde{x}_i \in A_i\}) = f'(\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_1 \in A'_1), \ldots, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{x}_n \in A'_n))$).

Разумеется, и в этом случае *взаимная и взаимная субъективная независимости эквивалентны.*

1.8 Условные и переходные субъективные распределения и меры

Обозначим в определении 1.7.1 $\widetilde{z}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_k)$, $\widetilde{z}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{x}_{k+1}, \ldots, \widetilde{x}_n)$, $Z_1 \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \times \ldots \times X_k$, $Z_2 \stackrel{\text{def}}{=} X_{k+1} \times \ldots \times X_n$, $z_1 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_k)$, $z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

Определение 1.8.1. Вариантом условного (со значениями в шкале L) распределения правдоподобий равенств $\widetilde{z}_1 = z_1$, $z_1 \in Z_1$, при условии $\widetilde{z}_2 = z_2$ назовем любое решение $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2)$ уравнения

$$\min\left\{t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1 \mid z_2), t^{\widetilde{z}_2}(z_2)\right\} = t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) = \min\left\{t^{\widetilde{z}_2|\widetilde{z}_1}(z_2|z_1), t^{\widetilde{z}_1}(z_1)\right\},\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \tag{1.14}$$

где

$$t^{\widetilde{z}_2}(z_2) = \sup\{t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) \mid z_1 \in Z_1\},\ z_2 \in Z_2. \tag{1.15}$$

В (1.14) в центре правдоподобие равенства $\widetilde{z}_1 = z_1$ *и* $\widetilde{z}_2 = z_2$, слева правдоподобие равенства $\widetilde{z}_2 = z_2$ *и при этом условии* правдоподобие равенства $\widetilde{z}_1 = z_1$. При этом в выражении условного правдоподобия значение правдоподобия условия должно быть преобразовано к единице.

Вариантом условного (*со значениями в шкале* $\widehat{L}$) распределения доверий неравенств $\widetilde{z}_1 \neq z_1$, $z_1 \in Z_1$, при условии[1] $\widetilde{z}_2 = z_2$ назовем любое решение $\widehat{t}^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2)$ уравнения

$$\widehat{t}^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) = \max\left\{\widehat{t}^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1 \mid z_2), \widehat{t}^{\widetilde{z}_2}(z_2)\right\},\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \tag{1.16}$$

[1] Неравенство $(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2) \neq (z_1, z_2)$, доверие которого слева в (1.16), верно, когда либо $\widetilde{z}_1 \neq z_1$, если $\widetilde{z}_2 = z_2$, либо $\widetilde{z}_2 \neq z_2$.

где $\widehat{t}^{\widetilde{z}_2}(z_2) = \inf\{\widehat{t}^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) \mid z_1 \in Z_1\}$, $z_2 \in Z_2$. В (1.16) слева доверие неравенства $(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2) \neq (z_1, z_2)$, справа доверие того, что либо $\widetilde{z}_2 \neq z_2$, *либо* $\widetilde{z}_2 = z_2$, *и* $\widetilde{z}_1 \neq z_1$.

Поскольку в (1.14), (1.15) $t^{\widetilde{z}_2}(z_2) \geqslant t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, уравнение (1.14) разрешимо относительно $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2)$. Любой вариант условного, при условии $\widetilde{z}_2 = z_2$, распределения правдоподобий значений $\widetilde{z}_1$ можно определить равенством

$$t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2) = \begin{cases} t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2), & \text{если } t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) < t^{\widetilde{z}_2}(z_2), \\ f(t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2)), & \text{если } t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, z_2) = t^{\widetilde{z}_2}(z_2), \end{cases} \quad z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \tag{1.17}$$

где $f(\cdot)\colon [0, 1] \to [0, 1]$ — произвольная функция, такая, что $f(a) \geqslant a$, $a \in [0, 1]$.

Заметим однако, что при некоторых $z_2 \in Z_2$ среди вариантов (1.17) условного распределения $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|z_2)$ *может и не быть распределения условного правдоподобия*, т. е. $\sup\{t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|z_2)|z_1 \in Z_1\} < 1$. Действительно, если в (1.15), например, при $\overline{z}_2 \in Z_2$ точная верхняя грань не достигается, то $t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2) < t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, и, следовательно, в (1.14) (см. (1.17))

$$\min\left\{t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2), t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)\right\} = t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2). \tag{1.18}$$

Если при этом $t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, то согласно (1.15), (1.18) $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, т. е. $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)\colon Z_1 \to Z_2$ *не есть распределение правдоподобий значений* но. э. $\widetilde{z}_1$, см. рис. 1.7.

Подобное замечание касается и вариантов условного распределения доверий в (1.16).

Содержательная интерпретация этого факта состоит в том, что в (1.14) условное распределение $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)\colon Z_1 \to L$ *принимает значения в шкале* L, в которой правдоподобие $\mathrm{Pl}(\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2) = t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, т. е. истинность равенства $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$, при *выполнении* которого получено распределение но. э. $\widetilde{z}_1$, *не абсолютна*, что *субъективно неприемлемо.* Пусть $0 < t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$. Рассмотрим решения $\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)$ уравнения (1.14) со значениями в *субъективной* шкале $\gamma_{\overline{z}_2}L$, которую м.-и. *определил* так, чтобы в ней правдоподобие истинности равенства $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$ стало равным единице, задав $\gamma_{\overline{z}_2}(\cdot)$ как непрерывную, строго монотонную функцию $[0, t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)] \to [0, 1]$, $\gamma_{\overline{z}_2}(0) = 0$, $\gamma_{\overline{z}_2}(t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)) = 1$. В субъективной шкале $\gamma_{\overline{z}_2}L$ уравнение (1.14) записывается в виде $\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2) = \min\left\{\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2), \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)\right\} = \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, согласно которому при любом $\overline{z}_2 \in Z_2$, при котором $t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) > 0$, *условное субъективное распределение правдоподобия* $\gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, для любого решения $t^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\cdot|\overline{z}_2)$ уравнения (1.14) есть *распределение субъективного правдоподобия* $\gamma_{\overline{z}_2} \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(\widetilde{z}_1 = z_1 \mid \widetilde{z}_2 = \overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, *со значениями в субъективной шкале* $\gamma_{\overline{z}_2}L$, *в данном случае — условного*, при условии $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$.

Определение 1.8.2. Вариантом условного, при условии $\widetilde{z}_2 = \overline{z}_2$, $0 < t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2) < 1$, субъективного распределения правдоподобий значений $\widetilde{z}_1$ в субъективной шкале $\gamma_{\overline{z}_2}L$ назовем функцию $t_s^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2) = \gamma_{\overline{z}_2} \circ t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1, \overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, где $\gamma_{\overline{z}_2}(\cdot)\colon [0, t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)] \to [0, 1]$ — любая непрерывная, строго монотонная функция $\gamma_{\overline{z}_2}(0) = 0$, $\gamma_{\overline{z}_2}(t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)) = 1$.

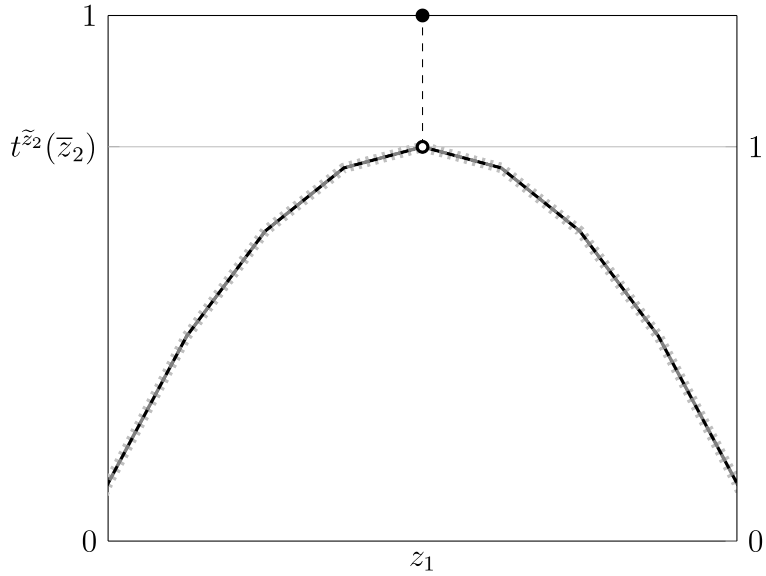


Рис. 1.7: Заданное совместное распределение правдоподобий $t^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(\cdot,\overline{z}_2)$ (точечный пунктир) и два варианта искомого условного, при условии $\widetilde{z}_2=\overline{z}_2$, распределения правдоподобий, соответствующие выбору в (1.17) $f(a)=a$ (пунктир) и $f(a)=1$ (сплошная линия), $a\in[0,1]$. Первое не удовлетворяет условию нормировки, второе не соответствует счетно-аддитивной мере (см. лемму 1.7.1 в [10]). Эти проблемы устраняются переходом к шкале $\gamma_{\overline{z}_2}L$ (правая шкала на рисунке), в которой правдоподобие условия стало равным единице. В этой шкале график искомого условного распределения — пунктирная линия

Вариантом условного, при условии $\widetilde{z}_2=\overline{z}_2$, $0<t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2)<1$, субъективного распределения доверий значений $\widetilde{z}_1$ в субъективной шкале $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}\widehat{L}$ назовем функцию $\widehat{t}_s^{\widetilde{z}_1|\widetilde{z}_2}(z_1|\overline{z}_2)=\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}\circ\widehat{t}^{\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2}(z_1,z_2)$, $z_1\in Z_1$, где $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}(\cdot)\colon[t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2),1]\to[0,1]$ — любая непрерывная, строго монотонная функция $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}(t^{\widetilde{z}_2}(\overline{z}_2))=0$, $\widehat{\gamma}_{\overline{z}_2}(1)=1$.

Подобная проблема сопутствует определению условного правдоподобия $\mathrm{Pl}(A\mid B)$ как решения уравнения

$$\mathrm{Pl}(A\cap B)=\min\{\mathrm{Pl}(A\mid B),\mathrm{Pl}(B)\},\qquad(*)$$

отражающего эквивалентность событий $A\cap B$ и (A, если B) & B, когда $0<\mathrm{Pl}(B)<1$. В этом случае любая непрерывная, строго монотонная функция $\gamma_B(\cdot)\colon[0,\mathrm{Pl}(B)]\to[0,1]$, $\gamma_B(0)=0$, $\gamma_B(\mathrm{Pl}(B))=1$, характеризующая событие B в субъективной шкале $\gamma_B L$ как достоверное, определит любой вариант условного правдоподобия $\mathrm{Pl}_s(A\mid B)=\gamma_B\circ\mathrm{Pl}(A\cap B)$ как единственное решение уравнения $\gamma_B\circ\mathrm{Pl}(A\cap B)=\min\{\gamma_B\circ\mathrm{Pl}(A\mid B),\gamma_B\circ\mathrm{Pl}(B)\}$ («спроецированного» на субъективную шкалу уравнения $(*)$), характеризующее событие B в субъективной шкале как достоверное, $\mathrm{Pl}_s(B\mid B)=1$.

Заметим, что в случае $0<\mathrm{Pr}(B)<1$ условная вероятность $\mathrm{Pr}(A\mid B)=\mathrm{Pr}(A\cap B)/\mathrm{Pr}(B)$ определена в «субъективной» шкале, преобразование в которую определяет «нормирующий» множитель $1/\mathrm{Pr}(B)$, как решение уравнения $\mathrm{Pr}(A\cap B) = \mathrm{Pr}(A \mid B)\mathrm{Pr}(B)$, удовлетворяющее условию $\mathrm{Pr}(B \mid B) = 1$.

Что касается условного доверия $\mathrm{Bel}(A \mid B)$ как решения уравнения

$$\mathrm{Bel}(A \cup (X \setminus B)) = \max\{\mathrm{Bel}(A \mid B), \mathrm{Bel}(X \setminus B)\} \tag{$**$}$$

отражающего эквивалентность событий $A \cup (X \setminus B)$ и (A, если B) $\vee$ $X \setminus B$, то в случае $0 < \mathrm{Bel}(X\setminus B) < 1$ следует определить условное доверие $\mathrm{Bel}_s(A \mid B)$ в субъективной шкале $\widehat{\gamma}_B\widehat{L}$, задав любую непрерывную строго монотонную функцию $\widehat{\gamma}_B(\cdot)\colon [\mathrm{Bel}(X\setminus B), 1] \to [0, 1]$, $\widehat{\gamma}_B(\mathrm{Bel}(X \setminus B)) = 0$, $\widehat{\gamma}_B(1) = 1$, и определив $\mathrm{Bel}_s(A \mid B) = \widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(A \cup (X \setminus B))$ как единственное решение уравнения $\widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(A \cup (X \setminus B)) = \max\{\widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(A \mid B), \widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(X \setminus B)\}$ (— «спроецированного» на субъективную шкалу $\widehat{\gamma}_B\widehat{L}$ уравнения ($**$)), в котором $\widehat{\gamma}_B \circ \mathrm{Bel}(X \setminus B) = 0$, ибо в субъективной шкале B — достоверное событие, и $\mathrm{Bel}_s(B \mid B) = \widehat{\gamma}_B\,\mathrm{Bel}(B \cup (X \setminus B)) = 1$.

1.9 Другие варианты мер правдоподобия и доверия

1.9.1 Варианты мер правдоподобия и доверия, значения которых, отличные от 0 и 1, могут быть содержательно интерпретированными

Нетрудно привести примеры субъективных моделей, в которых полезна содержательная, независящая от координатных представлений шкал, интерпретация некоторых, отличных от 0 и 1, значений правдоподобия и доверия, например, — значения 1/2, отвечающего индифферентности *каждого* м.-и. В таком случае для формулировки субъективных моделей коллективу м.-и. следует *договориться использовать вариант теории*, в котором определены шкалы $L_{\{1/2\}}$ и $\widehat{L}_{\{1/2\}}$ значений правдоподобия и доверия, группа $\overline{\Gamma}_{\{1/2\}}$ автоморфизмов которых определена как подгруппа группы $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал L и $\widehat{L}$, порожденная подгруппой $\Gamma_{\{1/2\}}$ группы Γ преобразований $\gamma_{\{1/2\}}(\cdot)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, оставляющих неподвижным[1] значение 1/2: $\Gamma_{\{1/2\}} = \{\gamma(\cdot) \in \Gamma,\ \gamma(1/2) = 1/2\}$. При этом дуальная $L_{\{1/2\}}$ шкала $\widehat{L}_{\{1/2\}}$ будет связана с $L_{\{1/2\}}$ дуальным изоморфизмом $\theta_{\{1/2\}}$: $L_{\{1/2\}} \to \theta_{\{1/2\}}L_{\{1/2\}} = \widehat{L}_{\{1/2\}}$, определенным некоторой функцией $\theta_{\{1/2\}}(\cdot) \in \Theta_{\{1/2\}} = \{\theta \in \Theta,\ \theta(1/2) = 1/2\}$.

Если для содержательной интерпретации коллективом м.-и. выделены значения a_i, $1 - a_i$, $i = 1, \dots, n$, где $0 \leqslant a_1 < \dots < a_n \leqslant 1/2 \leqslant 1 - a_n < \dots < 1 - a_1 \leqslant 1$, то

[1]Операции $+ \sim \max$, $\times \sim \min$ в $L_{\{1/2\}}$ сохранятся, если дополнительно к указанным в теореме 1.1 в [7] будут выполнены условия: $x \times (1/2) = x$, $x + (1/2) = 1/2$, $x \in [0, 1/2]$, $(1/2) \times x = 1/2$, $(1/2) + x = x$, $x \in [1/2, 1]$.

подгруппа Γ_S, где $S = \{a_1, \dots, a_n, 1 - a_n, \dots, 1 - a_1\}$, группы Γ, определенная функциями $\gamma_S(\cdot) \in \Gamma$, удовлетворяющими условиям $\gamma_S(a_i) = a_i$, $\gamma_S(1 - a_i) = 1 - a_i$, $i = 1, \dots, n$, определит подгруппу $\overline{\Gamma}_S \subset \overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал $L_{S'}$ и $\widehat{L}_{\widehat{S}'}$, где $S' = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\widehat{S}' = \{1 - a_n, \dots, 1 - a_1\}$, $S' \cup \widehat{S}' = S$, а класс $\Theta_S \subset \Theta$ функций $\theta_S(\cdot) \in \Theta$, удовлетворяющих условиям $\theta_S(a_i) = 1 - a_i$, $\theta_S(1 - a_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$, определит класс $\overline{\Theta}_S$ дуальных изоморфизмов $\theta_S \colon L_{S'} \to \theta_S L_{S'} \overset{\triangle}{=} \widehat{L}_{\widehat{S}'}$. В этом случае выделенные значения правдоподобий и доверий будут иметь один и тот же смысл для всех м.-и. коллектива.

Рассмотрим математический формализм, позволяющий охарактеризовать шкалу $L_{S'}$, $S' = \{a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n < 1 = a_{n+1}\}$ [10]. Определим параметрические классы отображений

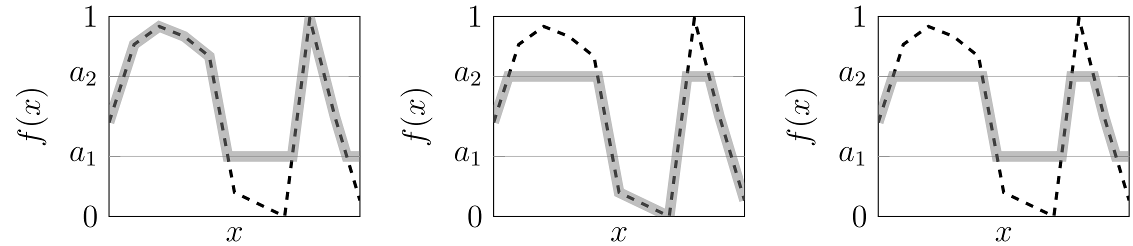
$$\begin{aligned}&(\cdot)^{\smile}_a \colon [0,1] \to [0,1],\ (\cdot)^{\frown}_a \colon [0,1] \to [0,1],\ a \in S',\colon\\ &(u)^{\smile}_a \overset{\text{def}}{=} \max\{a, u\} = a + u,\ (u)^{\frown}_a \overset{\text{def}}{=} \min\{a, u\} = a \times u,\ u \in [0,1],\end{aligned} \tag{1.19}$$

где параметр $a \in S'$ обозначает неподвижную точку шкалы $L_{S'}$, см. рис. 1.8. Заметим, что отображения (1.19) суть *проекторы*, ибо $((\cdot)^{\smile}_a)^{\smile}_a = (\cdot)^{\smile}_a$ и $((\cdot)^{\frown}_a)^{\frown}_a = (\cdot)^{\frown}_a$, а равенства

$$((u)^{\smile}_{a_i})^{\smile}_{a_j} = (u)^{\smile}_{a_i + a_j},\ ((u)^{\frown}_{a_i})^{\frown}_{a_j} = (u)^{\frown}_{a_i \times a_j},\ u \in [0,1],\ i, j = 0, \dots, n+1, \tag{1.20}$$

означают, что классы отображений (1.19) являются *полугруппами* относительно их композиций (1.20), ибо в (1.20) $a_i, a_j, a_i + a_j, a_i \times a_j \in S'$. Более того, и отображения $((u)^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j} = ((u)^{\frown}_{a_j})^{\smile}_{a_i \times a_j}$, $u \in [0,1]$, и $((u)^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j} = ((u)^{\smile}_{a_j})^{\frown}_{a_i + a_j}$, $u \in [0,1]$, являются *проекторами*, ибо

$$((((\cdot)^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j})^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j} = ((\cdot)^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_j},\ ((((\cdot)^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j})^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j} = ((\cdot)^{\frown}_{a_i})^{\smile}_{a_j}.$$



(а) Действие проектора $(\cdot)^{\smile}_{a_1}$ (б) Действие проектора $(\cdot)^{\frown}_{a_2}$ (в) Действие проекторов $((\cdot)^{\smile}_{a_1})^{\frown}_{a_2}$

Рис. 1.8: Пример действия (сплошная линия) проекторов (1.19) на значения заданной функции $f(\cdot)$ (пунктир). Проектор $(\cdot)^{\smile}_{a_1} \overset{\text{def}}{=} \max\{a_1, \cdot\}$ заменяет значения аргумента, меньшие a_1, на a_1 (нижняя горизонтальная линия). Проектор $(\cdot)^{\frown}_{a_2} \overset{\text{def}}{=} \min\{a_2, \cdot\}$ заменяет значения аргумента, бóльшие a_2, на a_2 (верхняя горизонтальная линия). Последовательное действие этих проекторов (независимо от порядка действия) заменяет значения аргумента, меньшие a_1, на a_1, а бóльшие a_2 — на a_2

Если $*$ — символ любой из бинарных операций $+$ или $\times$, то $(u*v)^{\smile}_a = (u)^{\smile}_a * (v)^{\smile}_a$, $(u*v)^{\frown}_a = (u)^{\frown}_a * (v)^{\frown}_a$, $u, v \in [0,1]$, поэтому *полугруппа* отображений (1.19) определяет *полугруппу автоморфизмов* шкалы $L_{S'}$.

Наконец, $\gamma \circ (\cdot)^{\smile}_a = (\gamma(\cdot))^{\smile}_{\gamma(a)}$, $\gamma \circ (\cdot)^{\frown}_a = (\gamma(\cdot))^{\frown}_{\gamma(a)}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\theta \circ (\cdot)^{\smile}_a = (\theta(\cdot))^{\frown}_{\theta(a)}$, $\theta \circ (\cdot)^{\frown}_a = (\theta(\cdot))^{\smile}_{\theta(a)}$, $\theta(\cdot) \in \Theta$.

Для представления pl-интеграла в шкале $L_{S'}$ заметим, что так как $\mathrm{pl}_g(f(\cdot)) = \underset{x\in X}{+}(g(x)\times f(x))$, то

$$(\mathrm{pl}_g(f(\cdot)))^{\frown}_a = \mathrm{pl}_{g^{\frown}_a}(f(\cdot)) = \mathrm{pl}_{g^{\frown}_a}(f^{\frown}_a(\cdot)),\ (\mathrm{pl}_g(f(\cdot)))^{\smile}_a = \mathrm{pl}_{g^{\smile}_a}(f(\cdot)) = \mathrm{pl}_{g^{\smile}_a}(f^{\smile}_a(\cdot)),$$

где $f^{\smile}_a(x) = (f(x))^{\smile}_a$, $f^{\frown}_a(x) = (f(x))^{\frown}_a$, $x \in X$, и соответственно для $a_i < a_{i+1}$

$$((\mathrm{pl}_g(f(\cdot)))^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}} = \mathrm{pl}_{(g^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}}}(f(\cdot)) = \mathrm{pl}_{(g^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}}}((f^{\smile}_{a_i})^{\frown}_{a_{i+1}}(\cdot))$$

— представление (проекция) pl-интеграла со значениями в шкале $L^{(i)} = ([a_i, a_{i+1}], \leqslant, +, \times)$, где a_i, a_{i+1}, $i = 0, \ldots, n$, — неподвижные точки шкалы $L_{S'} = \bigcup\limits_{0\leqslant i\leqslant n} L^{(i)}$, $\overline{\Gamma}_{\{a_0,\ldots,a_{n+1}\}} = \overline{\Gamma}_{\{a_0,a_1\}} \otimes \ldots \otimes \overline{\Gamma}_{\{a_n,a_{n+1}\}}$ — *группа ее автоморфизмов.*

Заметим, что в этом варианте теории мер правдоподобия, доверия м.-и. из образованного ими коллектива могут содержательно интерпретировать не только значения $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = 1$ pl-интеграла и правдоподобия, но и *факты включения их значений в неподвижные интервалы* $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$.

Для представления bel-интеграла в шкале $\widehat{L}_{\widehat{S}'}$ следует использовать дуальные отображения $(\cdot)^{\widehat{\frown}}_{\widehat{a}} = (\cdot)^{\smile}_a$, $(\cdot)^{\widehat{\smile}}_{\widehat{a}} = (\cdot)^{\frown}_a$.

1.9.2 Третий вариант теории мер правдоподобия и доверия

Рассмотрим вариант теории мер правдоподобия Pl' и доверия Bel', называемый далее третьим (второй вариант см. в [10—12]), который наследует некоторые черты теории вероятностей и психофизики. Определим шкалу $L' = ([0,1], \leqslant, +', \times')$ значений Pl', задав (как и во втором варианте) $a +' b \overset{\mathrm{def}}{=} a + b = \max\{a, b\}$, $a \times' b \overset{\mathrm{def}}{=} a \cdot b = a \otimes b$, где $\otimes$ — символ «обычного» умножения и выполнено условие дистрибутивности $c \times' (a +' b) = (c \times' a) +' (c \times' b)$, $a, b, c \in [0,1]$. Группа $\overline{\Gamma}'$ автоморфизмов L' порождается группой преобразований $\gamma'_\alpha(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma'_\alpha(a) = a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$, согласно условиям $\forall\, a, b \in [0,1]\ \forall\, \alpha > 0\ \gamma'_\alpha(a +' b) = \gamma'_\alpha(a) +' \gamma'_\alpha(b)$, $\gamma'_\alpha(a \times' b) = \gamma'_\alpha(a) \times' \gamma'_\alpha(b)$.

Заметим, что в третьем (и во втором) варианте шкала L' *имеет* Γ'-*инвариант*, а именно, *отношение логарифмов* $\pi = \log \gamma'_\alpha(\mathrm{Pl}'(A))/\log \gamma'_\alpha(\mathrm{Pl}'(B)) = \log \mathrm{Pl}'(A)/\log \mathrm{Pl}'(B)$ *не зависит от выбора шкалы* $\gamma'_\alpha L'$, $\gamma'_\alpha \in \overline{\Gamma}'$, и может быть содержательно истолковано [11; 12]. Дело в том, что класс преобразований $a \to a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$, содержит класс так называемых *психофизических функций*, связывающих шкалы значений реальных интенсивностей стимулов со шкалами их оценок испытуемыми [42]. В таком контексте рассматриваемые далее меры Pl' и Bel' можно интерпретировать как *оценки исследователя* (в его шкалах L' и $\widehat{L}'$) *модальных операторов правдоподобия и доверия* в его субъективной формулировке модели объекта исследования.

Шкалу $\widehat{L}' = ([0,\infty], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}', \widehat{\times}')$ значений Bel' определим (в отличие от второго варианта) как дуально изоморфную L', задав семейство дуальных изоморфизмов $\theta'_\beta\colon L' \to \theta'_\beta L' = \widehat{L}'$, порожденное семейством отображений $\theta'_\beta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,\infty]$, $\beta > 1$, $\theta'_\beta(u) = \begin{cases} \log_\beta u^{-1}, & 0 < u \leqslant 1, \\ \infty, & u = 0, \end{cases}$ а *бинарные операции* $\widehat{+}'$ *и* $\widehat{\times}'$ *в* $\widehat{L}'$ определим *как дуальные операциям* $+'$ *и* $\times'$ *в* L', *условиями*

$$\theta'_\beta(u_1 +' u_2) = \log_\beta(\max\{u_1,u_2\})^{-1} = \min\{\log_\beta u_1^{-1}, \log_\beta u_2^{-1}\} \overset{\text{def}}{=} \theta'_\beta(u_1)\widehat{+}'\theta'_\beta(u_2) \qquad (1.21)$$

$\theta'_\beta(u_1 \times' u_2) = \log_\beta(u_1 \times' u_2)^{-1} = \log_\beta u_1^{-1} \oplus \log_\beta u_2^{-1} \overset{\text{def}}{=} \theta'_\beta(u_1)\widehat{\times}'\theta'_\beta(u_2),\ u_1,u_2 \in [0,1],\ \beta > 1,$

согласно которым $v_1 \widehat{+}' v_2 \overset{\text{def}}{=} \min\{v_1,v_2\}$, $v_1 \widehat{\times}' v_2 \overset{\text{def}}{=} v_1 \oplus v_2$, где $\oplus$ — символ «обычного» сложения и выполнено условие дистрибутивности: $v\widehat{\times}'(v_1 \widehat{+}' v_2) = (v\widehat{\times}' v_1)\widehat{+}'(v\widehat{\times}' v_2)$, $v, v_1, v_2 \in [0,\infty]$.

Группа $\widehat{\widehat{\Gamma}}$ автоморфизмов шкалы $\widehat{L}'$ порождается группой $\widehat{\Gamma}'$ преобразований $\widehat{\gamma}'_\alpha(\cdot)\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$, $\alpha > 0$, $\widehat{\gamma}'_\alpha(v) = \alpha v$, $v \in [0,\infty]$, при этом для любых $v_1, v_2 \in [0,\infty]$ и любого $\alpha > 0$ $\widehat{\gamma}'_\alpha(v_1 \widehat{*} v_2) = \widehat{\gamma}'_\alpha(v_1)\widehat{*}\widehat{\gamma}'_\alpha(v_2)$, где $\widehat{*}$ — символ любой из операций $\widehat{+}'$ или $\widehat{\times}'$.

Наконец, pl'-, bel'-интегралы в третьем варианте определим равенствами

$$\mathrm{pl}'(\cdot)\colon L'(X) \to L',\ \mathrm{pl}'_g(f(\cdot)) = \underset{x\in X}{+'}(g(x) \times' f(x)) = \max_{x\in X}(g(x) \otimes f(x)), \qquad (1.22)$$

$$\mathrm{bel}'(\cdot)\colon \widehat{L}'(X) \to \widehat{L}', \mathrm{bel}'_{g'}(\widehat{f}(\cdot)) = \theta'_\beta(\mathrm{pl}'_g(\theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{f}(\cdot))) = \underset{x\in X}{\widehat{+}'}(\theta'_\beta \circ g(x)\widehat{\times}'\widehat{f}(x)) = \min_{x\in X}(\widehat{g}(x) \oplus \widehat{f}(x)),$$

где $\widehat{g}(\cdot) = \theta'_\beta \circ g(\cdot)$, $\theta^{-1}_\beta(\cdot)\colon [0,\infty] \to [0,1]$, $\beta > 1$, — семейство обратных отображений, $\theta'^{-1}_\beta(v) = \begin{cases} \beta^{-v}, & 0 \leqslant v < \infty, \\ 0, & v = \infty, \end{cases}$ порождающих семейство дуальных изоморфизмов $\theta'^{-1}_\beta\colon \widehat{L} \to \theta'^{-1}_\beta \widehat{L}' = L'$. Меры Pl'- и Bel' суть соответственно

$$\mathrm{Pl}'_g(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pl}'_g(\chi_A(\cdot)) = \underset{x\in X}{+'}(g(x) \times' \chi_A(x)) = \max_{x\in A} g(x),\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

$$\mathrm{Bel}'_{\widehat{g}}(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{bel}'_{\widehat{g}}(\widehat{\chi}_A(\cdot)) = \theta'_\beta(\mathrm{pl}'_g(\theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{\chi}_A(\cdot))) = \underset{x\in X}{\widehat{+}'}(\widehat{g}(x)\widehat{\times}'\widehat{\chi}_A(x)) = \min_{x\in X\setminus A} \widehat{g}(x),$$

где $\widehat{g}(\cdot) = \theta'_\beta \circ g(\cdot)$, $\widehat{\chi}_A(x) = \theta'_\beta \circ \chi_{X\setminus A}(x) = \begin{cases} \widehat{0} = \infty, & x \in A, \\ \widehat{1} = 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$

Замечание 1.9.1. Автору неизвестны публикации, в которых рассмотрен данный вариант теории мер правдоподобия и доверия.

Заключение

В учебном пособии рассмотрен МФСМ, основанный на теории мер правдоподобия, доверия, интегрирования относительно этих мер и применения МФСМ в научных исследованиях. Прежде всего, использование МФСМ *существенно расширило класс* Об. И., начиная с *эволюционирующих стохастических Об. И.* [9], см. § 2.1, допускающих *субъективное моделирование* и *эмпирическое восстановление их математических моделей*. Кроме того, использование МФСМ позволило устранить следующие проблемы, свойственные известным методам математического моделирования *субъективных суждений*. При формулировке математической модели субъективных суждений м.-и. в МФСМ достаточно упорядочить значения правдоподобий и доверий истинности элементарных высказываний (как в нечеткой модальной логике [36]), а не оценивать их численно, как требуется в методах [23; 24; 37; 38]. МФСМ позволяет моделировать «абсолютное незнание» модели Об. И., как в теории Демпстера–Шеффера [37], в субъективной логике [38] и в нечеткой модальной логике [36], причем независимо от модели наблюдений и от мощности множества элементарных высказываний (в отличие от модели «абсолютного незнания» в байесовском подходе [23; 24]). Более того, в отличие от ряда способов моделирования абсолютного незнания в байесовском подходе, но в рассмотренном формализме *модель любого следствия модели «абсолютного незнания» является моделью «абсолютного незнания»*.

В пособии предложены новые понятия субъективных шкал значений мер правдоподобия и доверия (§ 1.8 и замечание 2.1.1), новые варианты мер правдоподобия и доверия (§ 1.9.1 и 1.9.2), позволяющие учитывать коллективные интересы исследователей и психофизические закономерности.

Глава 2

Эмпирические основы

2.1 Эмпирическое восстановление математической модели НО. НЧ. О. Восстановление нечёткого неопределенного элемента как эмпирической оценки неизвестного параметра НО. НЧ. О.

Разумеется, МФСМ может существенно повышать эффективность научных исследований лишь при условии, что при доступности данных наблюдений за Об. И. может быть проверена адекватность его субъективной модели цели исследования, а субъективная модель — скорректирована, если требуется.

Пусть $M(x) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}(\cdot; x), \mathrm{N}^{\eta}(\cdot; x))$ — заданная с точностью до значения параметра[2] $x \in X$ нечёткая модель, см. [7, §1.3], неопределенного нечеткого объекта (НО. НЧ. О.), и м.-и. предложил модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ но. э. $\widetilde{x}$, охарактеризовав свои субъективные представления об истинности каждого $x \in X$ значениями мер правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$. Это означает, что м.-и. предложил *субъективную нечеткую модель* $M(\widetilde{x}) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}, \mathrm{N}^{\widetilde{\eta}})$ НО. НЧ. О., в которой но. нч. э. $\widetilde{\eta}$ задан субъективными мерами возможности $\widetilde{\mathrm{P}}(A) = \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta} \in A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{P}^{\eta}(A; \widetilde{x})$ и необходимости $\widetilde{\mathrm{N}}(A) = \mathrm{N}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta} \in A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{N}^{\eta}(A; \widetilde{x})$, $A \in \mathcal{P}(Y)$. В данном случае $\mathrm{P}^{\eta}(\cdot; x)$ и $\mathrm{N}^{\eta}(\cdot; x)$ суть модальные операторы нечеткости, заданные на $\mathcal{P}(Y)$ и для каждого $x \in X$ определяющие модель Об. И., то есть характеризующие свойства модели, не связанные с субъективными представлениями м.-и., например, связанные с событийно-частотной интерпретацией результатов наблюдений за НО. НЧ. О. $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ суть модальные операторы неопределенности, заданные м.-и. на множестве $\mathcal{P}(X)$ всех но. в. и представляющие его субъективное суждение об истинности предложенной им модели $M(\widetilde{x})$, то есть характеризующие его субъективное

[2] Например, $x = e \in (0, 1) = X$, т. е. $\mathrm{P}^{\eta} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{N}^{\eta} \in \mathbb{N}_{(\widehat{e})}$, $e = \widehat{e}$ неизвестно, см. [7, §1.3].

отношение к модели НО. НЧ. О. и неполноту его знаний о ней. Подобная субъективная модель исследована в § 3.3, а в данном случае речь пойдёт об *эмпирическом оценивании неизвестного* $x \in X$.

Если м.-и. доступны данные наблюдений за НО. НЧ. О., моделью которого является семейство $M(X) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta(\cdot; x), \mathrm{N}^\eta(\cdot; x))$, $x \in X$, он *может построить эмпирическую (нечеткую) модель* но. э. $\widetilde{x}$, *оценивающего значение* $x \in X$ по схеме, подобной схеме восстановления статистической модели но. э. [9].

2.1.1 При любом $x \in X$ объект может находиться в одном из двух состояний: x или $x'(x)$, отличном от x

Рассмотрим случай, в котором объект для каждого $x \in X$ может находиться в одном из двух состояний, определённых либо значением x, либо (конкурирующим) $x' = x'(x) \neq x$, где отображение $x'(\cdot)\colon X \to X$ известно м.-и. Семейство P^η-критических[1] для гипотезы $H(x) = \{x\}$ областей, инвариантное относительно выбора шкалы значений P^η, обозначим $\Psi_\lambda(x) = \{y \in Y,\ g^\eta(y; x') > \min\{\lambda, g^\eta(y; x)\}\}$, $\lambda \in (0, 1)$, ср. со статистическим аналогом (3.3.5.) в [13]. При наблюдении $\eta = y$ гипотеза $\{x\}$, согласно которой наблюдение контролировалось моделью $M(x)$, отвергается, если $y \in \Psi_\lambda(x)$, причем отвергается ошибочно с возможностью

$$\mathrm{p}_\lambda^-(x) = \mathrm{P}^\eta(\eta \in \Psi_\lambda(x); x) = \sup\{g^\eta(y; x) \mid y \in Y,\ g^\eta(y; x') > \min\{\lambda, g^\eta(y; x)\}\}.$$

Понятно, что *чем больше минимальное по* $\lambda \in (0, 1)$ *значение возможности* $\mathrm{p}_\lambda^-(x; y_0)$ *ошибочно отвергнуть гипотезу* $\{x\}$ *при наблюдении* $\eta = y_0$, *тем значительнее наблюдение* $\eta = y_0$ *свидетельствует о верности гипотезы* $\{x\}$, *согласно которой наблюдение* $\eta = y_0$ *контролировалось моделью* $M(x)$.

Поэтому *нечеткий но. э., то есть неопределённый элемент с нечётким распределением правдоподобий и доверий его значений,* $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\eta)$, *эмпирически оценивающий параметр* x *модели* $M(x)$, *контролировавшей результат наблюдения* $\eta = y_0$, *определим зависящими от* η *вариантами распределений правдоподобий*

$$t^{\widetilde{x}}(x; \eta)\big|_{\eta = y_0} = t^{\widetilde{x}}(x; y_0) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x; y_0) = \gamma\big(\inf_{\lambda \in (0,1)} \mathrm{p}_\lambda^-(x; y_0)\big) =$$
$$= \gamma\Big(\inf_{\lambda \in (0,1)} \sup \Big\{g^\eta(y; x) \,|\, y \in Y,\ g^\eta(y; x') > \min\{\lambda, g^\eta(y; x)\}, g^\eta(y_0; x') > \min\{\lambda, g^\eta(y_0; x)\}\Big\}\Big), \tag{2.1}$$

если множество $\Lambda(x; y_0) = \big\{\lambda \in (0, 1), g^\eta(y_0; x') > \min\{\lambda, g^\eta(y_0; x)\}\big\} \neq \varnothing$, и $t^{\widetilde{x}}(x; y_0) = 1$, *если* $\Lambda(x; y_0) = \varnothing$, *и доверий*

[1] Для простоты считаем P^η и N^η дуально согласованными, тогда семейства P^η- и N^η-критических областей совпадают.

$$
\begin{aligned}
&\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x;\eta)\big|_{\eta=y_0} = \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x;y_0) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x;y_0) = \theta(\inf_{\lambda\in(0,1)} \mathrm{p}^-_{\lambda}(x;y_0)) = \\
&= \sup_{\lambda\in(0,1)} \inf\Big\{\widehat{g}^{\eta}(y;x) \mid y\in Y,\, \widehat{g}^{\eta}(y;x') < \max\{\theta(\lambda),\widehat{g}^{\eta}(y;x)\}, \widehat{g}^{\eta}(y_0;x') < \max\{\theta(\lambda),\widehat{g}^{\eta}(y;x)\}\Big\},
\end{aligned}
\tag{2.1∗}
$$

если $\Lambda(x;y_0)\neq\varnothing$, и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x,y_0)=0$, *если* $\Lambda(x;y_0)=\varnothing$. В (2.1), (2.1∗) $x'=x'(x)$, $\widehat{g}^{\eta}(\cdot,\cdot)=\theta\circ g^{\eta}(\cdot,\cdot)$, а $\gamma(\cdot)\in\Gamma$ и $\theta(\cdot)\in\Theta$ — произвольные функции.

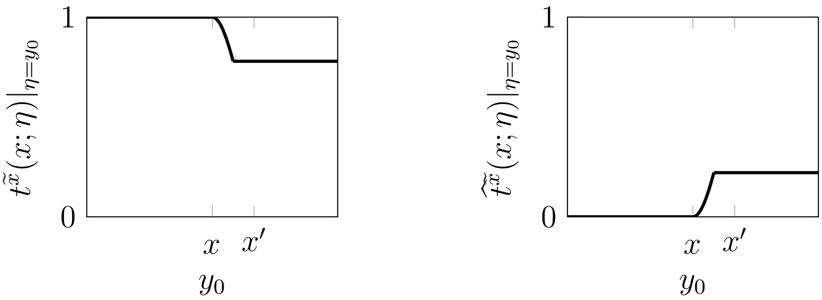


Рис. 2.1: Эмпирическое восстановление модели НО. НЧ. О., зависящей от $x\in X$, если для каждого $x\in X$ объект может находиться либо в состоянии x, либо в состоянии $x'\neq x$. Исследователь знает x, x', контролировавшее результат наблюдения распределение возможностей $g^{\eta}(y;x)=\exp(-(y-x)^2)$ и полученный результат наблюдения y_0. Показаны варианты (слева) нечеткого правдоподобия равенства неопределенного параметра $\widetilde{x}=x$ и (справа) нечеткого доверия неравенства $\widetilde{x}\neq x$

2.1.2 Для каждого $x\in X$ объект может находиться либо в состоянии x, либо в любом состоянии, отличном от x

Если в нечеткой задаче проверки гипотезы $H(x)=\{x\}$ альтернативой является множество $X\setminus\{x\}$, то семейством *нечётких, оценивающих* $x\in X$, *множеств максимального правдоподобия*, подобным семейству *случайных* оценивающих множеств максимального правдоподобия в [9], является семейство нечетких множеств $\Psi^{-1}(\eta,\lambda)$, $\lambda\in(0,1)$, значения которых при $\eta=y_0$ суть

$$
\Psi^{-1}(y_0;\lambda)=\{x\in X,\, g^{\eta}(y_0;x)\geqslant \min\{\lambda,\max_{x\in X} g^{\eta}(y_0;x)\}=\min\{\lambda,g(y_0)\}\},\ \lambda\in(0,1), \tag{2.2}
$$

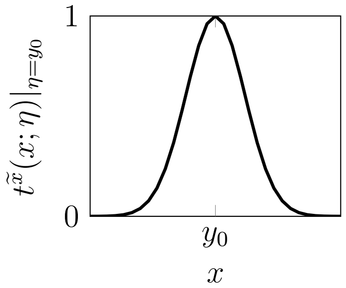
где $g(y_0)=\max_{x\in X} g^{\eta}(y_0;x)=g^{\eta}(y_0,x(y_0))$, а $x(y_0)$ — *максимально правдоподобное значение параметра* $x\in X$ при $\eta=y_0$. Поскольку $\forall\, x\in X\ g(y_0)\geqslant g^{\eta}(y_0;x)$, и, следовательно, максимальное значение $\lambda\in(0,1)$, при котором множество $\Psi^{-1}(y_0;\lambda)$ покрывает x, равно $g^{\eta}(y_0;x)$, то

$$
t^{\widetilde{x}}(x;\eta)\big|_{\eta=y_0}=t^{\widetilde{x}}(x;y_0)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x;y_0)=\gamma\circ g^{\eta}(y_0;x)=\gamma\circ \mathrm{P}^{\eta}(\eta=y_0;x) \tag{2.3}
$$

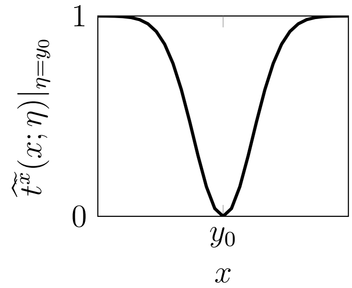
— *вариант нечёткого правдоподобия равенства* $\widetilde{x} = x \in X$ *при* $\eta = y_0 \in Y$, а

$$\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x;\eta)\big|_{\eta=y_0} = \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x;y_0) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x; y_0) = \theta \circ g^{\eta}(y_0;x) = \mathrm{N}^{\eta}(\eta \neq y_0; x) \qquad (2.3^*)$$

— *вариант нечеткого доверия неравенства* $\widetilde{x} \neq x \in X$ *при* $\eta = y_0 \in Y$.



(а) Распределение правдоподобий



(б) Распределение доверий

Рис. 2.2: Эмпирическое восстановление модели НО. НЧ. О., зависящей от $x \in X$, если для каждого $x \in X$ объект может находиться либо в состоянии x, либо в любом состоянии, отличном от x. Исследователь знает контролировавшее результат наблюдения распределение возможностей $g^{\eta}(y;x) = \exp(-(y-x)^2)$ и полученный результат наблюдения y_0. Показаны варианты (а) нечеткого правдоподобия равенства неопределенного параметра $\widetilde{x} = x$ (2.3) и (б) нечеткого доверия неравенства $\widetilde{x} \neq x$ (2.3*)

Замечание 2.1.1. Вообще говоря, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X;y_0) \leqslant 1$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing;y_0) \geqslant 0$), но наблюдение $\eta = y_0$ определяет не только вариант эмпирического правдоподобия (доверия), но и *изоморфную* L ($\widehat{L}$) *эмпирическую шкалу* $\gamma_\eta L|_{\eta=y_0} = \gamma_{y_0} L$ ($\widehat{\gamma}_\eta \widehat{L}|_{\eta=y_0} = \widehat{\gamma}_{y_0}\widehat{L}$), в которой $\gamma_{y_0} \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X;y_0) = 1$ ($\widehat{\gamma}_{y_0} \circ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing;y_0) = 0$), где $\gamma_{y_0}(\cdot)\colon [0, \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X,y_0)] \to [0,1]$ ($\widehat{\gamma}_{y_0}(\cdot)\colon [\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing,y_0),1] \to [0,1]$) — непрерывная строго монотонная функция, $\gamma_{y_0}(0) = 0$, $\gamma_{y_0}(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X,y_0)) = 1$ ($\widehat{\gamma}_{y_0}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing,y_0)) = 0$, $\widehat{\gamma}_{y_0}(1) = 1$).

Замечание 2.1.2. Проблема эмпирического восстановления модели но. э. рассмотрена в субъективной логике [33; 38; 39], в которой каждому событию $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}$ приписывается «субъективный вес» $b(A)$, отражающий уверенность включения $x \in A$ истинного значения но. э. $\widetilde{x}$ при отсутствии знаний о включении $x \in A'$ в любое подмножество $A' \subset A$, $A' \neq A$. Элементарным событиям $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ сопоставляются их «базовые частоты» $a(x)$ и общий для всех элементарных событий «вес неопределённости» u как «степень незнания» принадлежности $\widetilde{x}$ какому-либо из подмножества X. Сумма весов всех событий и веса неопределённости u, как и сумма всех базовых частот, равны единице. Абсолютное незнание характеризуется нулевыми весами всех событий, единичным весом неопределённости и равными друг другу базовыми частотами, полное знание — равными единице субъективным весом и базовой частоты истинного значения $\widetilde{x}$, равными нулю субъективными весами и базовыми частотами остальных значений $\widetilde{x}$, и нулевым весом неопределённости.

Основной недостаток: *правило комбинирования суждений* [33] и соответственно *метод эмпирического восстановления модели* $\widetilde{x}$ по данным наблюдений основаны на соответствии *субъективных весов байесовским вероятностям*, которые зависят от *субъективного выбора априорной вероятности*.

2.2 Согласованность субъективных и эмпирических, нескольких субъективных и т. п. данных и их комбинирование. Матрицы парных сравнений

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to L$ и $t^{\widetilde{x}(y_0)}(\cdot)\colon X \to L$ суть субъективное и эмпирическое распределения правдоподобий значений но. э. $\widetilde{x}$, где $t^{\widetilde{x}(y_0)}(\cdot) = t^{\widetilde{x}}(\cdot; y_0)$ либо (2.1), либо (2.3). Поскольку распределения представлены в разных шкалах, их невозможно *непосредственно* сравнить на предмет согласованности, так как их значения определены с точностью до (неизвестных!) преобразований $\gamma(\cdot)$ и $\gamma_0(\cdot)$ из Γ, и сравнивать можно лишь упорядоченности их значений. Обозначим $t^{\widetilde{x}(y_0)}(x_i) = t_i^{(0)}$, $t^{\widetilde{x}}(x_i) = t_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, m$, и охарактеризуем их независимо от шкал их значений, сопоставив каждому из распределений $(m+1) \times (m+1)$ матрицу $m^{(\alpha)} = m(t_{\cdot}^{(\alpha)})$, $\alpha = 0, 1$, парных сравнений, матричные элементы которой определим равенствами

$$m_{k,j}^{(\alpha)} = (m(t_{\cdot}^{(\alpha)}))_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_k^{(\alpha)} > t_j^{(\alpha)}, \\ 0, & \text{если } t_k^{(\alpha)} = t_j^{(\alpha)}, \\ -1, & \text{если } t_k^{(\alpha)} < t_j^{(\alpha)}, \end{cases} \quad k, j = 1, 2, \dots, m+1, \; t_{m+1}^{(\alpha)} = 0, \; \alpha = 0, 1. \tag{2.4}$$

Теперь вопрос о согласованности распределений $t_{\cdot}^{(0)}$ и $t_{\cdot}^{(1)}$ можно решить, сравнив соответствующие им матрицы $m^{(0)}$ и $m^{(1)}$ (2.4). Обозначим M_{m+1} класс всех $(m+1) \times (m+1)$ матриц парных сравнений и определим на M_{m+1} евклидово расстояние[1]

$$\rho(a, b) = \Big(\sum_{k,j=1}^{m+1} (a_{kj} - b_{kj})^2 \Big)^{1/2}, \; a = \{a_{kj}\}, b = \{b_{kj}\}, \tag{2.5}$$

между матрицами a и b, $a, b \in M_{m+1}$. Если расстояние $\rho(m^{(0)}, m^{(1)})$ между матрицами $m^{(0)}$ и $m^{(1)}$ *достаточно мало* по сравнению с их нормами $\|m^{(\alpha)}\| = \big(\sum\limits_{k,j=1}^{m+1} (m_{kj}^{(\alpha)})^2 \big)^{1/2}$, $\alpha = 0, 1$,

[1] См. в [43] аксиомы, приводящие к указанному выбору расстояния, и альтернативные варианты метрики.

то распределения $t^{(0)}_{\cdot}$ и $t^{(1)}_{\cdot}$ можно считать *согласованными*, и максимально согласованное с ними распределение можно определить, найдя его матрицу m_* парных сравнений как решение следующей задачи

$$\sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 \rho^2(m^{(\alpha)}, m_*) = \min_{m \in M_{m+1}} \sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 \rho^2(m^{(\alpha)}, m), \tag{2.6}$$

где w_α^2 — «вес» распределения[1] $t^{(\alpha)}$, $\alpha = 0, 1$, $\sum\limits_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 = 1$. Заметим, что если м.-и. *ничего не знает о возможных значениях параметра $x \in X$*, то его субъективное распределение правдоподобий $t_i^{(1)} = 1$, $i = 1, \ldots, m$, $m_{k,j}^{(1)} = 0$, $k, j = 1, \ldots, m$, см. § 1.4, и задача (2.6) имеет единственное решение $m_* = m^{(0)}$, а м.-и. должен своё субъективное распределение «скорректировать», заменив его на эмпирическое. Заметим также, что в данном случае *число α матриц парных сравнений может быть любым, конечным.*

Поскольку в (2.6), как нетрудно убедиться,

$$\sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 \rho^2(m^{(\alpha)}, m) = \sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 \rho^2(m^{(\alpha)}, \overline{m}) + \rho^2(\overline{m}, m), \tag{2.7}$$

где

$$\overline{m} = \sum_{\alpha=0,1} w_\alpha^2 m^{(\alpha)}, \tag{2.8}$$

то задача (2.6) эквивалентна задаче отыскания матрицы $m_* \in M_{m+1}$, ближайшей (в смысле (2.5)) к матрице $\overline{m}$, которая, вообще говоря, не является матрицей парных сравнений, ибо, хотя $\overline{m}_{kj} = -\overline{m}_{jk} \in [-1, 1]$, но, возможно, $\overline{m}_{kj} \notin \{-1, 0, 1\}$, $k, j = 1, \ldots, m + 1$. В данном случае очевидно, что «естественным претендентом» на *решение задачи $\rho^2(\overline{m}, m) \sim \min\limits_{m \in M_{m+1}}$ является матрица $\overline{m}_*$*, удовлетворяющая условию $\rho^2(\overline{m}, \overline{m}_*) = \min\limits_{m \in \overline{M}_{m+1}} \rho^2(\overline{m}, m)$, в котором $\overline{M}_{m+1} = \{m,\ m_{kj} = -m_{jk}, m_{kj} \in \{-1, 0, 1\}, k, j = 1, \ldots, m + 1\}$. *Ее матричные элементы суть*

$$\overline{m}_{*kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{m}_{kj} > 1/2, \\ 0, & \text{если } |\overline{m}_{kj}| \leqslant 1/2, \quad k, j = 1, \ldots, m+1. \\ -1, & \text{если } \overline{m}_{kj} < -1/2, \end{cases} \tag{2.9}$$

Если $\overline{m}_* \notin M_{m+1} \subset \overline{M}_{m+1}$, то есть если $\overline{m}_*$ — *не матрица парных сравнений* и, следовательно, *не может представлять* распределение, оптимально учитывающее субъективные и эмпирические данные, то и матрице m_* парных сравнений, $\rho^2(\overline{m}, m_*) = \min\limits_{m \in M_{m+1}} \rho^2(\overline{m}, m)$, как решению задачи (2.6), *доверять не следует*, ибо *включение $\overline{m}_* \in \overline{M}_{m+1} \setminus M_{m+1}$* матрицы $\overline{m}_*$, ближайшей к матрице $\overline{m}$ (2.8), естественно рассматривать как *свидетельство превышения критического уровня взаимно противоречивых данных* в распределениях $t^{(0)}_{\cdot}$ и $t^{(1)}_{\cdot}$. Если же $\overline{m}_* \in M_{m+1}$, то это *свидетельствует и о согласованности распределений*

[1]«Вес» позволяет учесть «относительную надёжность» субъективного и эмпирического распределений.

$t^{(0)}_{\cdot}$ и $t^{(1)}_{\cdot}$, а матрица $m_* = \overline{m}_*$ оптимально *представляет* субъективное и эмпирическое распределения правдоподобий, и его можно считать субъективным, *эмпирически скорректированным* распределением правдоподобий значений но. э. $\widetilde{x}$.

Заметим, что если вместо матрицы $\overline{m}_*$, определенной в (2.9), ввести параметрический класс матриц $\overline{m}_\delta$, $\delta \in (0, 1)$, положив

$$\overline{m}_{\delta kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{m}_{kj} > \delta, \\ 0, & \text{если } |\overline{m}_{kj}| \leqslant \delta, \quad k, j = 1, \dots, m, \\ -1, & \text{если } \overline{m}_{kj} < -\delta, \end{cases}$$

то можно, выбрав $\delta = \delta_* \in (0, 1)$, ослабить влияние противоречивости субъективных и эмпирических данных так, чтобы $\overline{m}_{\delta_*} \in M_{m+1}$.

Подобная задача исследования согласованности и комбинирования субъективных данных возникает в ситуации, в которой м.-и. предложил модель $M(\widetilde{x})$ Об. И., а его коллега имеет данные наблюдений за характеристиками Об. И., неизвестные значения которых м.-и. моделирует но. э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, см. § 1.5. Коллега, естественно, предлагает м.-и. свою субъективную модель но. э. $\widetilde{y}$, согласованную с его данными наблюдений. Если $t^{(0)}_i$ и $t^{(1)}_i$, $i = 1, \dots, \dim(Y)$, суть соотвественно распределения правдоподобий значений: но. э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, обусловленное моделью $M(\widetilde{x})$ Об. И., и но. э. $\widetilde{y}$, предложенное коллегой м.-и., то исследование их согласованности и комбинирование могут быть выполнены по рассмотренной схеме. Если существует функция $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to X$, то исследовать на согласованность и комбинировать можно распределения правдоподобий: $t^{(1)}_i = t^{\widetilde{x}}(x_i)$, $i = 1, \dots, m$, предложенное м.-и., и $t^{(2)}_i = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = \varphi(x_i))$, индуцированное распределением, предложенным его коллегой. Если же функция $\varphi^{-1}(\cdot)$ не существует, и $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ — полный прообраз $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$, то в качестве варианта распределения правдоподобий, индуцированного распределением, предложенным его коллегой, можно использовать $t^{(2)\widetilde{x}}_i = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(x_i \in A^{\widetilde{y}}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in A_{x_i} = \{\varphi(x_i)\}) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x_i))$, $i = 1, \dots, m$, где $A_{\cdot}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ — отображение, обратное $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$. Понятно, что так определённое распределение $t^{(2)\widetilde{x}}(x) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x))$, $x \in X$, — не единственное, удовлетворяющее условиям $\sup\limits_{x \in X,\, y = \varphi(x)} t^{(2)\widetilde{x}}(x) = \sup\limits_{x \in X,\, y = \varphi(x)} t^{\widetilde{y}}(\varphi(x)) = t^{\widetilde{y}}(y)$, $y \in Y$, где $\varphi(X) = Y$.

Наконец, если некоторое следствие модели $M(\widetilde{x})$ субъективно охарактеризовано несколькими исследователями индикаторными функциями одноточечного покрытия, см. § 1.5, то и в этом случае исследование их согласованности и комбинирование можно выполнить по этой же схеме.

Замечание 2.2.1. Проблема комбинирования субъективных и эмпирических данных рассмотрена в теории Демпстера-Шеффера [37], в которой но. э. $\widetilde{x}$ задаётся «весовой функцией» $m(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$, $\sum\limits_{A \subset X} m(A) = 1$, определяющей $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(A) = \sum\limits_{A' \subset A} m(A')$,

$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(A) = \sum\limits_{A' \cap A \neq \varnothing} m(A')$, $A \in \mathcal{P}(X)$. Значение $m(A)$ интерпретируется как мера уверенности в том, что $\widetilde{x} \in A$ при отсутствии уверенности в том, что $\widetilde{x} \in A'$ для любого $A' \subset A$, $A' \neq A$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(A)$ интерпретируется как мера уверенности в том, что $x \in A$ (с учётом всех подмножеств A' множества A, содержащих $\widetilde{x}$), $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(A)$ — мера сомнения в том, что $\widetilde{x} \notin A$. «Абсолютное незнание» моделируется значениями $m(A) = 1$, $A \in \mathcal{P}(X))$, при этом $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(A) = 1$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(A) = 0$. «Абсолютное знание» моделируется значениями $m(A) = 1$, если $A = \{x\}$, $m(A) = 0$, если $A = X \setminus \{x\}$, где x — истинное значение $\widetilde{x}$.

Основные недостатки: *правило комбинирования весовых функций, полученных из разных источников*, приводит к нелогичным результатам [44], предложенные в [44—49] *правила не всегда применимы*. Предложенные в [50; 51] *методы эмпирического восстановления модели* $\widetilde{x}$ зависят от правила комбинирования весовых функций и наследуют его недостатки.

2.3 Нечёткое правдоподобие истинности но. в., согласно которому субъективная модель но. э. $\widetilde{x}$ согласуется с данными наблюдений за НО. НЧ. О.

Судить об адекватности субъективной модели НО. НЧ. О. цели исследования следует на основе правдоподобия согласия субъективной модели но. э. $\widetilde{x}$ непосредственно с данными наблюдений за НО. НЧ. О. Заметим, что аналогом семейства оценивающих множеств максимального правдоподобия [9] в рассматриваемом случае является семейство множеств *максимального правдоподобия*

$$\Psi_\lambda^{-1}(y) = \{x \in X,\ g^\eta(y;x) \geqslant \min\{\lambda, \max_{x \in X} g^\eta(y,x)\} = \min\{\lambda, g^\eta(y)\}\},\ \lambda \in (0,1), \tag{2.10}$$

оценивающих значения параметра $x \in X$ распределения $g^\eta(\cdot;x)$ возможности, контролировавшей наблюдение $\eta = y \in Y$, см. (2.2). Значения $\lambda \in (0,1)$ в (2.10) и значения возможности $\mathrm{p}^\eta \in [0,1]$ покрытия нечетким множеством $\Psi_\lambda^{-1}(\eta)$ параметра $x \in X$ возможности $\mathrm{P}^\eta(\,\cdot\,;x)$, контролировавшей результат $\eta = y$ наблюдения, связаны условием $\mathrm{p}^\eta = \mathrm{P}^\eta(\eta \in Y,\ x \in \Psi_\lambda^{-1}(\eta); x)$, подобным условиям в [8, §1.7], П. , в [9, §8.2, 9].

Если наблюдается $\eta = y \in Y$, то значение $\Psi_\lambda^{-1}(y)$ в (2.10) есть множество тех $x \in X$, при которых принимается гипотеза $H(x) = \{x\}$. Значение

$$\Psi_\lambda(x) = \{y \in Y, g^\eta(y;x) \geqslant \min\{\lambda, g^\eta(y)\}\} \tag{2.11}$$

отображения $\Psi_\lambda(\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, обратного к $\Psi_\lambda^{-1}(\cdot)\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ в (2.10), есть множество результатов наблюдений $\eta = y \in Y$, каждый из которых влечет принятие гипотезы $H(x) = \{x\} \subset X$.

Рассмотрим семейство *но. м.* $\Psi_\lambda(\widetilde{x})$, $\lambda \in (0,1)$, где $\widetilde{x}$ — но. э., модель которого $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ предложена м.-и. Поскольку $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in \Psi_\lambda(\widetilde{x}))$ — правдоподобие истинности но. в., согласно которому неопределенное множество $\Psi_\lambda(\widetilde{x})$ покрывает y, а согласно (2.11) $\forall x \in X\ \Psi_\lambda(x) \subset \Psi_{\lambda'}(x)$, если $\lambda \geqslant \lambda'$, то *чем меньше максимальное* $\lambda = \lambda(y) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in (0,1), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in \Psi_\lambda(\widetilde{x})) = 1\}$, при котором правдоподобие покрытия y но. м. $\Psi_\lambda(\widetilde{x})$ равно единице, *тем значительнее наблюдение* $\eta = y$ свидетельствует против субъективной модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ но. э. $\widetilde{x}$. Поэтому *вариант нечеткого правдоподобия истинности неопределённого высказывания, согласно которому субъективная модель но. э.* $\widetilde{x}$ *согласуется с наблюдением* η *за* НО. НЧ. О., $\widetilde{x} \sim \eta$, *определим равенством*

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \sim \eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - \lambda(\eta) = 1 - \sup\{\lambda \mid \lambda \in (0,1), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in \Psi_\lambda^{-1}(\eta)) = 1\},$$

ср. с правдоподобием истинности но. в. в [9].

Замечание 2.3.1. Проблема правдоподобия согласия модели но. э. $\widetilde{x}$ характерна для субъективного моделирования, основанного на нечеткой модальной логике [35; 36], в которой истинность высказываний принимает значения в полной решетке $(\mathcal{B}, \leqslant)$, $0 = \inf \mathcal{B}$, $1 = \sup \mathcal{B}$, $\forall a, b \in \mathcal{B}$ определён элемент $a \to b$, для которого $\forall c \in \mathcal{B}\ c \leqslant (a \to b) \Leftrightarrow \min\{a, c\} \leqslant b$ и который может интерпретироваться как мера истинности высказывания «$a \leqslant b$». Вводится модальный оператор $\Box$, для которого формула $\Box_a A$ может интепретироваться как высказывание «мера убедительности факта, выражаемого формулой A, равна a». Формализм нечёткой модальной логики позволяет моделировать случай абсолютного незнания.

Основной недостаток: *невозможность эмпирического восстановления истинности элемантарных высказываний* и *отсутствие правила комбинирования знаний, полученных из разных источников.*

Заключение

В главе рассмотрены методы эмпирического восстановления субъективных моделей НО. НЧ. О., обобщающие методы [9; 14; 15] и отличающиеся от известных методов в байесовском подходе [23; 24], в теории Демпстера–Шеффера [37], в субъективной логике [38]; рассмотрены новые методы: исследования *непротиворечивости* эмпирических и субъективных данных и *их комбинирования* (§ 2.2), определения *правдоподобия согласия* субъективной модели НО. НЧ. О. с данными наблюдений за НО. НЧ. О. (§ 2.3).

Глава 3

Приложения

3.1 Субъективное моделирование вероятностной случайности

3.1.1 Дискретная вероятностная модель, ее свойства и ее эмпирическое восстановление

Речь пойдет о вероятностной случайности, свойственной эволюционирующему стохастическому объекту (Ст. О.), моделью которой служит некоторое вероятностное пространство $(X,\ \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X) = (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}^{\xi})$, в котором $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, ξ — случайный элемент (сл. э.) со значениями в X, *канонический* для $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$: $\mathrm{Pr}_X(A) = \mathrm{Pr}^{\xi}(\xi \in A)$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}_X(\{x_i\}) = \mathrm{Pr}^{\xi}(\xi = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i = 1$, — распределение вероятностей его значений. Условимся, что

$$1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \tag{3.1}$$

М.-и. *определяет субъективную* модель сл. э. ξ как но. э. $\widetilde{x}$ со значениями в X, *максимально согласованный* с ξ (см. определение 3.1.1 на следующей странице), и намерен восстановить его модель как пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X) = (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с правдоподобием Pl и доверием Bel, которое будет и его *субъективной моделью вероятностной случайности*, задав распределения правдоподобий и доверий $\mathrm{pl}_i = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x_i) = t^{\widetilde{x}}(x_i)$ и $\mathrm{bel}_i = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x_i) = \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, значений $\widetilde{x}$, и соответственно, см. § 1.1, определив

$$\begin{aligned} \mathrm{Pl}_X(A) &= \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A) = \mathop{+}_{i:\, x_i \in A} t^{\widetilde{x}}(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i:\, x_i \in A} t^{\widetilde{x}}(x_i) = \mathop{+}_{i:\, x_i \in A} \mathrm{pl}_i, \\ \mathrm{Bel}_X(A) &= \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A) = \mathop{\widehat{+}}_{i:\, x_i \in X \setminus A} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x_i) = \inf_{i:\, x_i \in X \setminus A} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x_i) = \mathop{\widehat{+}}_{i:\, x_i \in X \setminus A} \mathrm{bel}_i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Рассмотрим связи распределений правдоподобий и доверий в (3.2) с вероятностью Pr_X.

Поскольку естественно, что[1] $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i \geqslant \mathrm{pl}_j$, то для упорядоченности распределения правдоподобий значений но. э. $\widetilde{x}$ м.-и. *принимает согласованное с упорядоченностью* (3.1) условие

$$1 = \overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} \mathrm{pl}_i = \sup_i \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_1 \geqslant \mathrm{pl}_2 \geqslant \ldots, \tag{3.3}$$

в котором *каждая конкретная упорядоченность*, *заданная только равенствами и строгими неравенствами*, определёнными двоичным числом $e = 0, e_1 e_2 \ldots$ согласно правилу $e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1}$, $e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, выделит в (3.3) *класс взаимно эквивалентных* мер правдоподобия, распределённых согласно числу e, обозначим его $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$; классы вероятностей и правдоподобий, удовлетворяющих условиям (3.1) и (3.3), обозначим $\mathbb{P}\mathrm{r}$ и $\mathbb{P}\mathrm{l}$. Так как $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e')} = \varnothing$, если $e \neq e'$, то

$$\mathbb{P}\mathrm{l} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)} \tag{3.4}$$

— разбиение класса $\mathbb{P}\mathrm{l}$ правдоподобий, распределённых согласно (3.3), на классы $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$, *взаимно эквивалентных правдоподобий*, ср. с [7, §1.2].

Согласно равенствам (3.2) для правдоподобия и равенствам $\mathrm{Pr}_X(E) = \sum\limits_{i:\, x_i \in E} \mathrm{pr}_i$, $E \neq \varnothing$, $\mathrm{Pr}_X(\varnothing) = 0$, для вероятности определим подмножества $\mathcal{P}_i(X) \subset \mathcal{P}(X)$, $i = 1, 2, \ldots$, см. рис. 3.1:

- $\mathcal{P}_1(X) = \{A \in \mathcal{P}(X),\, x_1 \in A\}$, $\forall\, A \in \mathcal{P}_1(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_1 = 1$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_1 = [\mathrm{pr}_1, 1]$, где Δ_1 — минимальный по включению интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}_X(A)$;

- $\mathcal{P}_2(X) = \{A \in \mathcal{P}(X),\, x_1 \notin A, x_2 \in A\}$ $\forall\, A \in \mathcal{P}_2(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_2$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_2 = [\mathrm{pr}_2, 1 - \mathrm{pr}_1]$, где Δ_2 — минимальный интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}_X(A)$;

- $\mathcal{P}_i(X) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\, x_1 \notin A, \ldots, x_{i-1} \notin A, x_i \in A\}$ $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_i$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}]$, где Δ_i — минимальный интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}_X(A)$, $i = 3, 4, \ldots$; понятно, что

- $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_1(X) \cup \mathcal{P}_2(X) \cup \ldots$, $\mathcal{P}_i(X) \cap \mathcal{P}_j(X) = \varnothing$, $i \neq j$.

Поскольку $\forall\, A \in \mathcal{P}_i(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \mathrm{pl}_i$, $\mathrm{Pr}_X(A) \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\forall\, \mathrm{Pr}_X \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ $\exists\, \breve{\gamma}(\cdot) \in \breve{\Gamma}(\mathrm{Pr}) \subset \breve{\Gamma}$ $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}_X(A) = \breve{\gamma}(\mathrm{Pr}_X(A))$, где $\breve{\Gamma}$ — класс монотонных функций $\breve{\gamma}(\cdot)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $\breve{\gamma}(0) = 0$, $\breve{\gamma}(1) = 1$, в котором функция $\breve{\gamma}(\cdot)$ определяет *согласованность* Pl_X с Pr_X и удовлетворяет условиям: $\breve{\gamma}(a) = \mathrm{pl}_i$, $a \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$, ср. с [7, §2.1].

---

[1]Заметим, что $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i \geqslant \mathrm{pl}_j \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_j, \\ \mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_j \Rightarrow \mathrm{pl}_i \geqslant \mathrm{pl}_j, \end{cases}$ поэтому $\mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_j \Rightarrow \mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_j$, ибо импликация $\mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_j \Rightarrow \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_j$ невозможна, так как влечет $\mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_j$.

Определение 3.1.1. Правдоподобие Pl_X назовем *максимально согласованным* с вероятностью Pr_X (обозначение $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Pl}_X$), если функция $\breve{\gamma}(\cdot) \in \breve{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)$ выбрана так, что $\mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing \Leftrightarrow f_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1$, и $\mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing \Leftrightarrow f_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Соответственно но. э. $\widetilde{x}$ назовём *максимально согласованным* со сл. э. ξ, $\xi \approx> \widetilde{x}$.

Теорема 3.1.1. • *Для любого $e \in (0,1)$ классу $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$ эквивалентных правдоподобий Pl_X взаимно однозначно соответствует класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ субъективно эквивалентных вероятностей Pr_X, определённый условиями*

$$e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1, \; e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i \leqslant 1, \tag{3.5}$$

$i = 1, 2, \ldots$, а разбиению (3.4) *соответствует разбиение $\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup\limits_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \varnothing$, $e \neq e'$, класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей Pr_X на классы субъективно эквивалентных.*

- *Согласно условиям* (3.5) *для любых $\mathrm{Pl}_X \in \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$ и $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Pl}_X$ найдётся функция $\gamma_e(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, монотонно не убывающая и непрерывная на $(0,1]$ такая, что для любого $A \in \mathcal{P}(X)$*

$$\mathrm{Pl}_X(A) = \mathop{\hat{+}}_{i\colon x_i \in A} \mathrm{pl}_i = \mathop{\hat{+}}_{i\colon x_i \in A} \gamma_e(\mathrm{pr}_i) = \gamma_e\Big(\sum_{i\colon x_i \in A} \mathrm{pr}_i\Big) = \gamma_e(\mathrm{Pr}_X(A)), \tag{3.6}$$

  см. рис. 3.1.

- *Класс $\breve{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)$ таких функций $\gamma_e(\cdot)$ определяется вероятностью $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, см. [7, теорема 2.1, рис. 1].*

- *В частности, но. э. $\widetilde{x}$ в* (3.2) *максимально согласован со случайным элементом ξ, если согласно* (3.6) $\mathrm{pl}_i = \gamma_e(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\gamma_e(\cdot) \in \breve{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)$.

По такой же схеме определяется и доверие Bel_X, максимально согласованное с вероятностью Pr_X, $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Bel}_X$, причём, как нетрудно убедиться, если $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Pl}_X$ и $\mathrm{Pr}_X \approx> \mathrm{Bel}_X$, то меры Pl_X и Bel_X оказываются *дуально согласованными*, т. е. $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Bel}_X(A) = \theta(\mathrm{Pl}_X(X \setminus A))$, $\mathrm{bel}_i = \theta(\mathrm{pl}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, где Θ — класс строго монотонных непрерывных функций $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, символизирующих *нечёткое отрицание*: «доверие»(A) = не«правдоподобие»$(X \setminus A)$, см. [7, замечание 1.1]. Поэтому упорядоченность (3.3) эквивалентна упорядоченности $0 = \mathop{\hat{+}}\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{bel}_i = \inf\limits_i \mathrm{bel}_i \leqslant \mathrm{bel}_1 \leqslant \mathrm{bel}_2 \leqslant \ldots$, определяющей класс $\mathbb{B}\mathrm{el}$ доверий, а каждая конкретная упорядоченность, определённая равенствами и строгими неравенствами и выделенная двоичным числом $e = 0{,}e_1 e_2 \ldots$ по правилу $e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{bel}_i < \mathrm{bel}_{i+1}$,

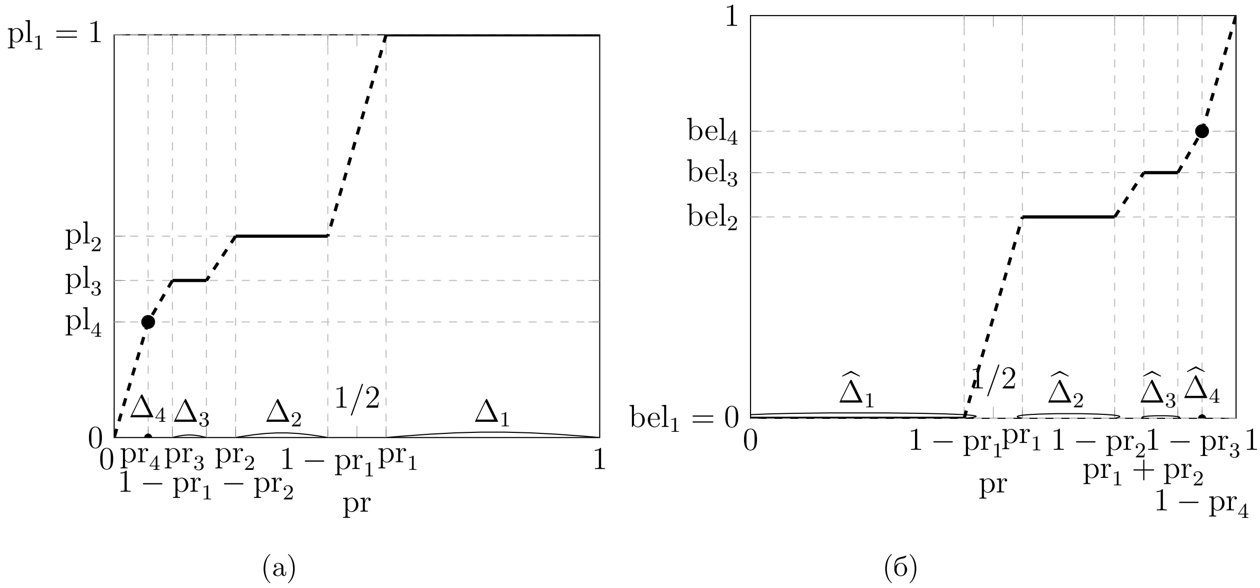


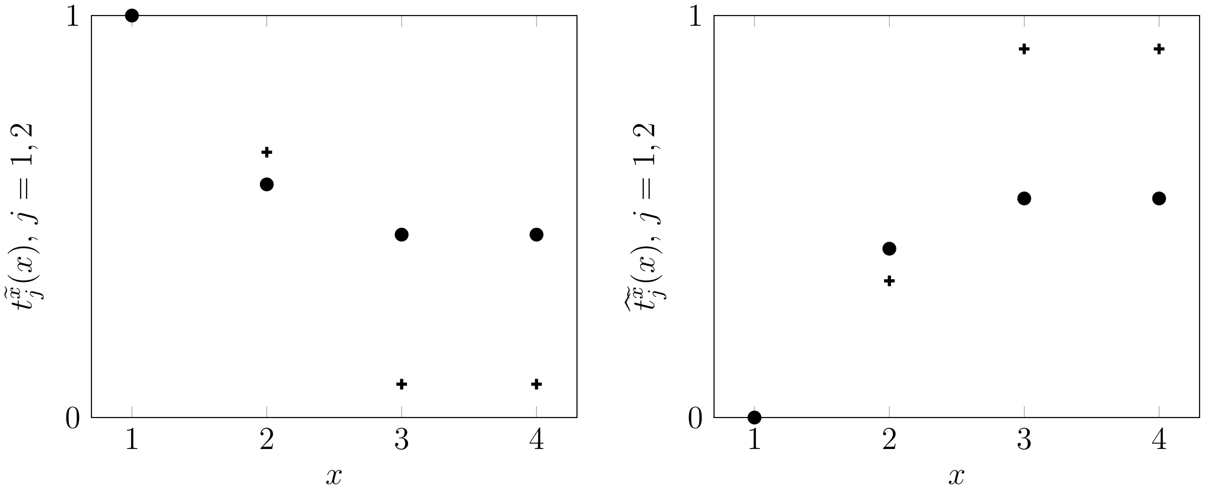
Рис. 3.1: Взаимно однозначные соответствия: (а) между значениями Pl и минимальными интервалами, содержащими значения Pr, штриховые линии, соединяющие области постоянных значений правдоподобия, дополняют их до графика функции γ_e, $e = 0.1111$; (б) между значениями Bel и минимальными интервалами, содержащими значения Pr, для $\theta(a) = 1 - a$, $a \in [0, 1]$ (ср. с [7, рис. 1])

$e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{bel}_i = \mathrm{bel}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, определит класс $\mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$ взаимно эквивалентных доверий, и подобно (3.4) $\mathbb{B}\mathrm{el} = \bigcup\limits_{e\in(0,1)} \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$, $\mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)} \cap \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e')} = \varnothing$, $e \neq e'$, см. рис. 3.1.

Субъективной моделью вероятностной случайности, модель которой — вероятностное пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$, является любое из эквивалентных пространств $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, если $\mathrm{Pr}_X \approx\!> \mathrm{Pl}_X$, $\mathrm{Pr}_X \approx\!> \mathrm{Bel}_X$, см. рис. 3.2. Более того, при этих условиях любое из эквивалентных пространств с правдоподобием Pl_X и доверием Bel_X будет субъективной моделью вероятностной случайности, модель которой — любое вероятностное пространство, субъективно эквивалентное[1] $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$, см. рис. 3.3; в этом случае меры Pl_X и Bel_X называются Pr_X-*измеримыми*, а *канонический для любого из пространств* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$ но. э. $\widetilde{x}$ *является субъективной моделью* сл. э. ξ, *канонического для* любого из субъективно эквивалентных $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$; все такие но. э. *взаимно эквивалентны* и любой из них $\widetilde{x}$ называется *максимально согласованным со* сл. э. ξ, $\xi \approx\!> \widetilde{x}$, см. теорему 3.1.1.

Свойства субъективной модели вероятностой случайности.

[1]Взаимно субъективно эквивалентными называются пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$, $\mathrm{Pr}_X \in \mathrm{Pr}_{(e)}$, взаимно эквивалентными называются пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, $\mathrm{Pl}_X \in \mathrm{Pl}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X \in \mathrm{Bel}_{(e)}$.



(а) (б)

Рис. 3.2: Два распределения (а) правдоподобий $t_1^{\widetilde{x}}$ (точки) и $t_2^{\widetilde{x}}$ (плюсы), (б) доверий $\widehat{t}_1^{\widetilde{x}}$ (точки) и $\widehat{t}_2^{\widetilde{x}}$ (плюсы), $\widetilde{x} \in X = \{1,2,3,4\}$, определяющие взаимно эквивалентные пространства с правдоподобием и доверием $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_1^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}_1^{\widetilde{x}})$, $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_2^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}_2^{\widetilde{x}})$, соответственно. Обе меры правдоподобия $\mathrm{Pl}_1^{\widetilde{x}}$, $\mathrm{Pl}_2^{\widetilde{x}}$ (меры доверия $\mathrm{Bel}_1^{\widetilde{x}}$, $\mathrm{Bel}_2^{\widetilde{x}}$) принадлежат одному и тому же классу $\mathbb{Pl}_{(0.1101)}$ (классу $\mathbb{Bel}_{(0.1101)}$) и максимально согласованы с мерами вероятности на рис. 3.3

①

$$\begin{gathered}\forall\, e \in (0,1)\ \forall\, \mathrm{Pr}_X \in \mathbb{Pr}_{(e)}\ \forall\, \mathrm{Pl}_X \in \mathbb{Pl}_{(e)}\ \forall\, \mathrm{Bel}_X \in \mathbb{Bel}_{(e)}\ \exists\, \gamma_e(\cdot) \in \breve{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)\ \exists\, \theta_e(\cdot) \in \breve{\Theta}(\mathrm{Pr}_X) \\ \forall\, A \in \mathcal{P}(X)\ \mathrm{Pl}_X(A) = \gamma_e(\mathrm{Pr}_X(A)),\ \mathrm{Bel}_X(A) = \theta_e(\mathrm{Pr}_X(X \setminus A)),\end{gathered} \tag{*}$$

где $\breve{\Theta}(\mathrm{Pr}_X) = \theta\breve{\Gamma}(\mathrm{Pr}_X)$, $\theta(\cdot) \in \Theta$. Поэтому *вероятностная случайность*, в модели которой $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(1)}) \times (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(2)}) \times \ldots$ вероятности $\mathrm{Pr}_X^{(1)}, \mathrm{Pr}_X^{(2)}, \ldots$ *субъективно эквиваленты*, т. е. содержатся в некотором классе $\mathrm{Pr}_{(e)}$, имеет *единственную с точностью до эквивалентности субъективную модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, в которой меры $\mathrm{Pl}_X \in \mathbb{Pl}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X \in \mathbb{Bel}_{(e)}$ и называются $\mathrm{Pr}_X^{(1)}$-, $\mathrm{Pr}_X^{(2)}$-, …-*измеримыми*, а последней соответствует класс $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X)$, $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{Pr}_{(e)}$ вероятностных моделей, называемых *субъективно эквивалентными*, $e \in (0,1)$.

② Если $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(1)}) \times (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(2)}) \times \ldots$ — модель последовательности взаимно независимых испытаний, в которой среди вероятностей $\mathrm{Pr}_X^{(1)}, \mathrm{Pr}_X^{(2)}, \ldots$ конечное число k различных, причём $\mathrm{Pr}_X^t \in \mathbb{Pr}_{(e)}$, $t = 1, \ldots, k$, то $\forall\, \mathrm{Pl}_X \in \mathbb{Pl}_{(e)}$, $\forall\, \mathrm{Bel}_X \in \mathbb{Bel}_{(e)}$ $\exists\, N\ \forall\, n > N$ $\mathrm{Pl}_X(A) > \mathrm{Pl}_X(B) \Leftrightarrow \mathrm{Bel}_X(A) > \mathrm{Bel}_X(B) \Rightarrow \nu^{(n)}(A) \overset{\text{п. н.}}{>} \nu^{(n)}(B)$, где $\nu^{(n)}(A), \nu^{(n)}(B)$ — частоты событий A, B, наблюдаемых в последовательности n взаимно независимых испытаний. Этот факт, вытекающий из предыдущего следствия и теремы 3.1.1, характеризует *событийно-частотную интерпретацию субъективной модели вероятностной случайности*, см. [7, теорема 3.1].

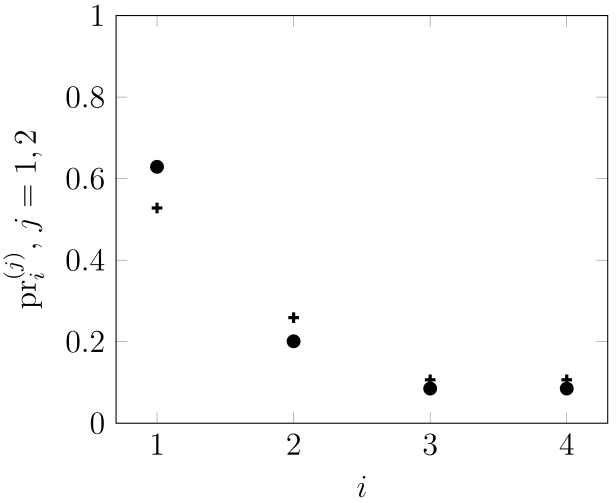


Рис. 3.3: Два распределения вероятностей $\mathrm{pr}_i^{(1)}$ (точки) и $\mathrm{pr}_i^{(2)}$ (плюсы), $i \in \{1, 2, 3, 4\} = X$, определяющие субъективно эквивалентные вероятностные пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr}_X^{(1)})$, $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X^{(2)})$, соответственно. Обе меры вероятности $\mathrm{Pr}_X^{(1)}$, $\mathrm{Pr}_X^{(2)}$ принадлежат одному и тому же классу $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1101)}$, и с ними максимально согласованы меры правдоподобия и доверия на рис. 3.2

3 Если в этой модели взаимно независимых испытаний $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, вероятности $\mathrm{Pr}_X^1, \ldots, \mathrm{Pr}_X^k$ *произвольно изменяются от испытания к испытанию* в *пределах некоторого класса* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, то результаты наблюдений за частотами элементарных событий $\{x_1\}, \ldots, \{x_m\}$ не позволят восстановить вероятностную модель вероятностной случайности, но при *условии* $f_i^t = \mathrm{pr}_1^t + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^t + 2\mathrm{pr}_i^t \neq 1$, $i = 1, \ldots, m$, *регулярности* $\mathrm{Pr}_X^{(t)}$, $t = 1, \ldots, k$, конкретные упорядоченности распределений pl_i, bel_i, $i \neq 1, \ldots, m$, (т. е. значение e) *будут восстановлены безошибочно на основе почти наверное (п. н.) конечного числа испытаний*, см. [7, теорема 3.2]. Иными словами, в этом случае м.-и. свою *субъективную модель вероятностной случайности может восстановить эмпирически, причём безошибочнно, на основе конечного числа событийно-частотных наблюдений, а вероятностную модель* может восстановить лишь с точностью до включения в класс субъективно эквивалентных. Заметим, что если вероятности не изменяются от испытания к испытанию, то м.-и. может восстановить и вероятностную модель, но при любом конечном числе испытаний — лишь приближенно.

Задача *эмпирического восстановления* субъективной модели вероятностной случайности в случае $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и вероятности Pr_X, удовлетворяющей условиям (3.1) и $f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i \neq 1$, $i = 1, \ldots, m$, эквивалентна статистической задаче проверки гипотез, в которой на основе частот $\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}$ событий $\{x_1\}, \ldots, \{x_m\}$, наблюдаемых в последовательности $n = 1, 2, \ldots$ взаимно независимых испытаний, для каждого $i = 1, \ldots, m$ требуется принять одну из гипотез: либо $e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i > \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i =$

$\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1$, либо $e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{pl}_i = \mathrm{pl}_{i+1} \Leftrightarrow f_i < 1$.

Следующий адаптивный алгоритм решает простейшую задачу эмпирического восстановления субъективной модели вероятностной случайности.

Теорема 3.1.2. *Пусть для всех* $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} &1)\ \textit{если}\ \widetilde{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n)},\ \textit{то считать}\ e_i = 1,\\ &2)\ \textit{если}\ \widetilde{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n)},\ \textit{то считать}\ e_i = 0,\\ &3)\ \textit{если}\ |\widetilde{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n)},\ \textit{то продолжить испытания},\ n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\widetilde{f}_i^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)}$, $\nu_i^{(n)}$ *— частота исхода* $\{x_i\}$ *в последовательности* n *взаимно независимых испытаний,* $i = 1, \ldots, m$, $\delta^{(n)} = \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}$, α *— верхняя граница вероятности ошибочных решений* 1), 2). *Тогда условие* 3) *выполняется для п. н. конечного числа испытаний, и алгоритм* (3.7) *с вероятностью* $\geqslant 1 - m\alpha$ *безошибочно восстанавливает* $e = 0.e_1 \ldots e_m$ *и субъективную модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, $\mathrm{Pl}_X \in \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X \in \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$, *вероятностной случайности, отвечающей любой вероятности* $\mathrm{Pr}_X \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$.

В [7; 13; 16; 17] рассмотрен подобный (3.7) алгоритм, восстанавливающий с гарантированной вероятностью точную *субъективную модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_X, \mathrm{Bel}_X)$, $\mathrm{Pl}_X \in \mathbb{P}\mathrm{l}_{(e)}$, $\mathrm{Bel}_X \in \mathbb{B}\mathrm{el}_{(e)}$, *каждого испытания* в случае 3 *изменяющихся субъективно эквивалентных вероятностей из* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, см. [7, теорема 3.3].

Итак, субъективное моделирование вероятностной случайности *позволяет интерпретировать данные событийно-частотных наблюдений за эволюционирующим Ст. О., вероятностная модель которого произвольно эволюционирует в пределах некоторого класса субъективно эквивалентных моделей, и позволяет эмпирически восстанавливать его субъективную модель. Если при этом учесть, что любая неэволюционирующая вероятностная модель будет непременно ошибочной моделью эволюционирующего Ст. О., то перечисленные факты свидетельствуют в пользу субъективного моделирования эволюционирующего Ст. О.*

3.1.2 Абсолютно непрерывная вероятностная модель

Рассмотрим субъективное моделирование вероятностной случайности, вероятностной моделью которой является класс $\mathcal{P}\mathrm{r}^{(s)}_{\mathcal{L}^{(n)}}$ вероятностных пространств $(\mathcal{R}^n, \mathcal{L}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(s)})$, $s(\cdot) \in S_\varphi$, в которых $\mathcal{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathcal{L}^{(n)}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств $A \subset \mathcal{R}^n$, Pr^s — абсолютно непрерывная относительно меры Лебега вероятность с плотностью $\rho^{(s)}(x) = s(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, где $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to [0,1]$ — непрерывная[1] функция, удовлетворяющая условиям: $\max\limits_{x \in \mathcal{R}^n} \varphi(x) = 1$ и $\exists a \in [0,1)$ $\{x \in \mathcal{R}^n, \varphi(x) \geqslant$

[1]Далее все функции наделяются качествами, позволяющими не отвлекаться на исследование математических проблем, не относящихся к сути рассматриваемой задачи моделирования.

$a\}$ — ограниченное множество, $s(\cdot)\colon [0,1) \to [0,\infty)$ — непрерывная, строго монотонно возрастающая функция, $s(0) = 0$ и $\int\limits_{\mathcal{R}^n} s(\varphi(x))dx = 1$, а S_φ — класс всех таких функций.

Классу $\mathcal{P}\mathrm{r}$ сопоставим класс взаимно эквивалентных субъективных моделей $(\mathcal{R}^n, \mathcal{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{Pl}^{(\gamma)}, \mathrm{Bel}^{(\theta)})$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\theta(\cdot) \in \Theta$, где правдоподобие $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и доверие $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$ заданы их распределениями $t^{(\gamma)}(x) = \gamma(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, и $\widehat{t}^{(\theta)}(x) = \theta(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$.

В [10, §2.6] показано[1], что $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, *максимально* согласованные с любой вероятностью $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s(\cdot) \in S_\varphi$, не несут информации о $\mathrm{Pr}^{(s)}$ в том смысле, что: $\forall\, A \in \mathcal{L}^{(n)}$ $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}(A) > 0 \Rightarrow \mathrm{Pl}^{(\gamma)}(A) = 1$, $\mathrm{Bel}^{(\theta)}(A) < 1 \Rightarrow \mathrm{Bel}^{(\theta)}(A) = 0$. Такая нечёткая модель свидетельствует об «абсолютном незнании» вероятностной модели. Поэтому *согласованность* классов $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, $\theta(\cdot) \in \Theta$, с классом $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s(\cdot) \in S_\varphi$, естественно определить не как *максимальную*, а как *субъективную согласованность классов распределений* $(\gamma \circ \varphi)(\cdot)$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, и $(\theta \circ \varphi)(\cdot)$, $\theta(\cdot) \in \Theta$ (классов взаимно эквивалентных $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, $\theta(\cdot) \in \Theta$) *с классом плотностей* $\rho^{(s)}(\cdot) = (s \circ \varphi)(\cdot)$, $s(\cdot) \in S_\varphi$, *на максимальной* σ*-алгебре* $\mathcal{A}_\varphi \subset \mathcal{L}^{(n)}$, *относительно которой измерима функция* $\varphi(\cdot)$, а, следовательно, и все функции $(\gamma \circ \varphi)(\cdot)$, $(\theta \circ \varphi)(\cdot)$ и $(s \circ \varphi)(\cdot)$, $s(\cdot) \in S_\varphi$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\theta(\cdot) \in \Theta$. Соответственно *субъективной моделью* любой вероятностной случайности, модель которой $(\mathcal{R}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(s)})$ может произвольно эволюционировать в пределах класса $\mathcal{P}\mathrm{r}$, т. е. при условии, что функция $s(\cdot) \in S_\varphi$, является любое из взаимно эквивалентных пространств с правдопобием и доверием $(\mathcal{R}^n, \mathcal{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{Pl}^{(\gamma)}, \mathrm{Bel}^{(\theta)})$, $\gamma \in \Gamma$, $\theta \in \Theta$.

Такое определение субъективной согласованности классов $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, $\theta(\cdot) \in \Theta$, с классом $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s(\cdot) \in S_\varphi$, *обусловлено* тем, что на любом множестве $A_c = \{x \in \mathcal{R}^n,\ \gamma(\varphi(x)) = \gamma(c)\} = \{x \in \mathcal{R}^n,\ \theta(\varphi(x)) = \theta(c)\}$, $c \in [0,1]$, на котором постоянны значения распределений $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$, постоянны и значения плотности вероятности $\mathrm{Pr}^{(s)}$: $\rho^{(s)}(x) = s(\varphi(x)) = s(c)$, $x \in A_c$. Сравнительный анализ качества вероятностных и субъективно с ними согласованных нечётких моделей (эквивалентных субъективным моделям в этом пункте!) интерпретации данных измерительного эксперимента представлен на рис. 1 в [8].

Пусть, например, $\rho^{(s)}(x) = (2\pi)^{-n/2} \det \Sigma^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}\|\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\|^2)$, $x \in \mathcal{R}^n$, — гауссовская плотность, $\varphi(x) = f(\|\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\|^2)$, где $f(\cdot)\colon [0,\infty) \to [0,1]$, непрерывна, строго монотонно убывает, $f(0) = 1$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тогда класс $\mathrm{Pr}^{(s)}$, $s \in S_\varphi$, включает: гауссовскую вероятность, t-распределение с k степенями свободы с плотностью $\mathrm{const}[1 + \frac{1}{k}\|\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\|^2]^{-(k+n)/2}$, $x \in \mathcal{R}^n$, $\mathrm{const} = \frac{\Gamma((n+k)/2)\det\Sigma^{-1/2}}{\Gamma(k/2)(k\pi)^{n/2}}$, и др.

[1] В [10, §2.6] это показано для возможности и необходимости (см. [7]) формально эквивалентных $\mathrm{Pl}^{(\gamma)}$ и $\mathrm{Bel}^{(\theta)}$.

3.1.3 Субъективная модель вероятностной случайности в третьем варианте мер правдоподобия и доверия

Рассмотрим классы взаимно-эквивалентных правдоподобий в третьем варианте, максимально согласованные с классами субъективно эквивалентных вероятностей.

Так как в первом, см. § 1.1, во втором, см. [10], и в третьем, см. § 1.9.2, вариантах мер правдоподобий Pl' и Pl операции сложения $+'$ и $+$ в шкалах L' и L их значений определены одинаково: $a +' b = a + b = \max\{a, b\}$, $a, b \in [0, 1]$, то условия, *определяющие максимальную согласованность* Pl' с Pr в третьем варианте, могут быть сформулированы так, как в определении 3.1.1 сформулированы условия максимальной согласованности Pl с Pr, если в определении 3.1.1 Pl заменить на Pl', Γ — на Γ', $\breve{\gamma}$ — на $\breve{\gamma}'$ и $\breve{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ — на $\breve{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$. При этом как и в определении 3.1.1

$$\begin{aligned}&\breve{\gamma}'(a) = \mathrm{pl}'_i,\ a \in \Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}],\\ &\mathrm{pl}'_i > \mathrm{pl}'_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing,\ \mathrm{pl}'_i = \mathrm{pl}'_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing,\ i = 1, 2, \ldots,\end{aligned} \tag{3.8}$$

и подобно (3.6) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)\ \exists\, \breve{\gamma}'(\cdot) \in \breve{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$

$$\mathrm{Pl}'(A) = \sup_{i:\, x_i \in A} \mathrm{pl}'_i = \sup_{i:\, x_i \in A} \breve{\gamma}'(\mathrm{pr}_i) = \breve{\gamma}'(\sup_{i:\, x_i \in A} \mathrm{pr}_i) = \breve{\gamma}'(\sum_{i:\, x_i \in A} \mathrm{pr}_i) = \breve{\gamma}'(\mathrm{Pr}(A)). \tag{3.9}$$

Однако теперь, в отличие от первого варианта, см. § 1.9.2, $\forall\, \breve{\gamma}'(\cdot) \in \breve{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$

$$\breve{\Gamma}'(\mathrm{Pr}) = \{\gamma' \circ \breve{\gamma}'(\cdot),\ \gamma'(\cdot) \in \Gamma'\} = \{(\breve{\gamma}')^{\alpha}(\cdot),\ \alpha > 0\}, \tag{3.10}$$

и этот факт позволит построить класс $\breve{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$.

Идею восстановления класса $\breve{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$ рассмотрим на примере $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ для вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, удовлетворяющей условиям $2\mathrm{pr}_1 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1$, $\mathrm{pr}_4 > 0$, $\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_4 = 1$, согласно которым в (3.8) $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$, $i = 1, 2, 3$; взаимно-эквивалентные правдоподобия в третьем варианте назовём Γ'-эквивалентными.

Искомая функция $\breve{\gamma}'(\cdot) \in \breve{\Gamma}'(\mathrm{Pr})$, определяющая максимальную Γ'-согласованность Pl' с Pr, *задаётся* следующими условиями, см. рис. 3.4:

$$\begin{aligned}&\mathrm{pl}_1 = (\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} = 1,\ \beta_1 > 0,\ \text{любое},\\ &\mathrm{pl}_2 = (\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} = ((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} \Rightarrow \beta_2 \ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1) = \beta_1 \ln((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1),\ \beta_2 < \beta_1,\\ &\mathrm{pl}_3 = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3} = ((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} \Rightarrow \beta_3 \ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1) = \beta_2 \ln((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1),\\ &\beta_3 < \beta_2,\\ &\mathrm{pl}_4 = (\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3},\end{aligned} \tag{3.11}$$

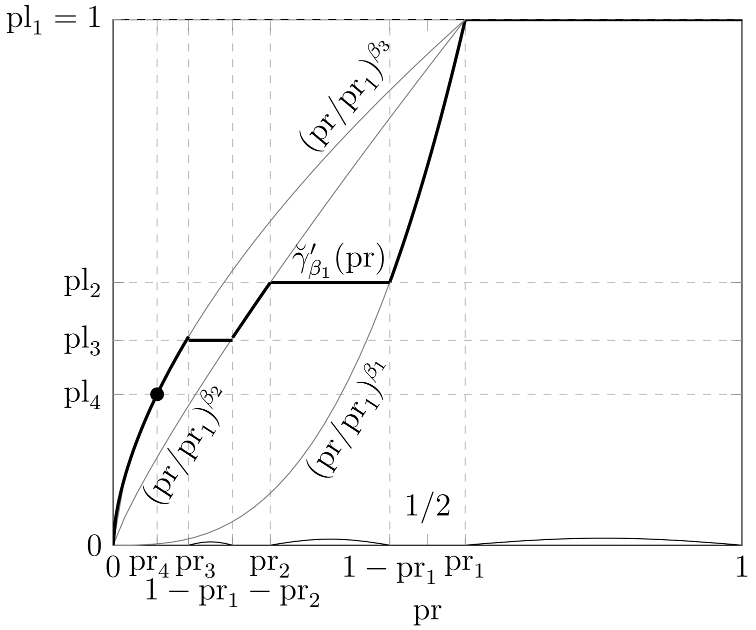


Рис. 3.4: График функции $\breve\gamma'(\cdot) \in \breve\Gamma'(\mathrm{Pr})$, $\breve\gamma'(\mathrm{pr}) = \breve\gamma'_{\beta_1}(\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$. Класс $\{\breve\gamma'_{\beta_1}(\cdot),\ \beta_1 > 0\}$ определяет класс Γ'-эквивалентных правдоподобий, распределения которых $\mathrm{pl}_i^{\beta_1} = \breve\gamma'_{\beta_1}(\mathrm{pr}_i) = \left(\breve\gamma'|_{\beta_1=1}(\mathrm{pr}_i)\right)^{\beta_1}$, $i = 1,2,3,4$, $\beta_1 > 0$, где функция $\breve\gamma'_{\beta_1}(\cdot)$ определена в (3.12) (ср. с [7, рис. 1])

согласно которым в (3.9) для $a \in [0,1]$

$$\breve\gamma'_{\beta_1}(a) = \begin{cases} \mathrm{pl}_1 = 1,\ a \in [\mathrm{pr}_1, 1],\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1},\ a \in [1-\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1], \\ \mathrm{pl}_2,\ a \in [\mathrm{pr}_2, 1-\mathrm{pr}_1],\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2},\ a \in [1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_2], \\ \mathrm{pl}_3,\ a \in [\mathrm{pr}_3, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2],\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3},\ a \in [0, \mathrm{pr}_3], \\ \mathrm{pl}_4 = (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3},\ a \in [\mathrm{pr}_4, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2-\mathrm{pr}_3] = [\mathrm{pr}_4, \mathrm{pr}_4]. \end{cases} \tag{3.12}$$

В равенствах (3.11) значение $\beta_1 > 0$ выделяет одну из функций $\breve\gamma'_{\beta_1}(\cdot) \in \breve\Gamma'(\mathrm{Pr}) = \{\breve\gamma'_{\beta_1}(\cdot),\ \beta_1 > 0\}$ в (3.12), второе равенство во второй строке в (3.11) связывает β_2 с β_1 и с Pr, второе равенство в третьей строке в (3.11) связывает β_3 с β_2 и с Pr. Однопараметрическое семейство функций $\breve\gamma'_{\beta_1}(\cdot)$, $\beta_1 > 0$, (3.12) образует класс $\breve\Gamma'(\mathrm{Pr})$, отвечающий вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, см. рис. 3.4.

Соотношения (3.11), (3.12) определяют *субъективную модель вероятностной случайности во втором и в третьем вариантах.*

Класс Γ'-эквивалентных правдоподобий определяется значениями Γ'-инвариантов

$$\pi_3 = \ln \mathrm{pl}_3 / \ln \mathrm{pl}_2,\ \pi_4 = \ln \mathrm{pl}_4 / \ln \mathrm{pl}_3,\ \pi_3 > 1,\ \pi_4 > 1. \tag{3.13}$$

Для любых фиксированных значений $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$ класс Γ'-эквивалентных правдоподобий, обозначим его $\mathbb{P}\mathrm{l}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, содержится в классе $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ Γ-эквивалентных правдоподобий, удовлетворяющих условию $1 = \mathrm{pl}_1 > \mathrm{pl}_2 > \mathrm{pl}_3 > \mathrm{pl}_4 > 0$, и, согласно (3.13), выделяется в $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ условиями $\mathrm{pl}_3 = \mathrm{pl}_2^{\pi_3}$, $\mathrm{pl}_4 = \mathrm{pl}_3^{\pi_4}$, определяющими в $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ кривую[1]

$$\mathrm{pl}_1 = 1,\ \mathrm{pl}_3 = \mathrm{pl}_2^{\pi_3},\ \mathrm{pl}_4 = \mathrm{pl}_2^{\pi_4\pi_3},\ \mathrm{pl}_2 \in (0,1). \tag{3.14}$$

Двухпараметрическое семейство кривых (3.14), отвечающих значениям $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, исчерпывает класс $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ в том смысле, что через каждую точку $(\mathrm{pl}_1, \mathrm{pl}_2, \mathrm{pl}_3, \mathrm{pl}_4)$, $1 = \mathrm{pl}_1 > \mathrm{pl}_2 > \mathrm{pl}_3 > \mathrm{pl}_4 > 0$, проходит одна кривая (3.14) семейства, выделенная условием (3.13).

Следовательно,

$$\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)} = \bigcup_{\substack{\pi_3>1,\\ \pi_4>1}} \mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4} \tag{3.15}$$

— *разбиение класса* $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ Γ-*эквивалентных возможностей на классы* $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$ Γ'-*эквивалентных возможностей.*

Каждой кривой (3.14), определяющей класс $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$ Γ'-эквивалентных возможностей, согласно (3.11) соответствует класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$ субъективно эквивалентных вероятностей, содержащийся в классе $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$ есть кривая в $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, определяемая, согласно условиям (3.11), (3.13), уравнениями

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \ln \mathrm{pl}_3 / \ln \mathrm{pl}_2 = \ln((1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1), \\ \pi_4 &= \ln \mathrm{pl}_4 / \ln \mathrm{pl}_3 = \ln(\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1), \end{aligned} \tag{3.16}$$

в которых

$$\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 + \mathrm{pr}_4 = 1,\ 2\mathrm{pr}_1 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1,\ \mathrm{pr}_4 > 0. \tag{3.17}$$

Между классами $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, согласно условиям (3.13), (3.16), имеется взаимно однозначное соответствие, определяющее максимальную согласованность $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, и разбиению (3.15) соответствует разбиение

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)} = \bigcup_{\pi_3>1,\ \pi_4>1} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}^{\pi_3,\pi_4}. \tag{3.15*}$$

З а м е ч а н и е 3.1.1. Авторам неизвестны публикации по субъективному моделированию вероятностной случайности. Если читателя могут заинтересовать исследования по *субъективным вероятностям*, то очерк развития понятия субъективной вероятности дан в монографии [52], в сборнике[53] имеется обширная библиография по субъективным вероятностям. Однако эти исследования не связаны с субъективным моделированием вероятностной случайности.

[1] $\mathbb{P}\mathrm{l}_{(0.1111)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$ обозначают как классы правдоподобий и вероятностей, так и классы их распределений.

3.2 Энтропии субъективных распределений правдоподобий и доверий значений неопределённого элемента

3.2.1 Энтропия как усреднённая мера неопределённости/информативности случайного исхода испытания

Как известно, энтропию $H(\mathrm{pr}_\cdot)$ как меру средней относительной неопределенности/информативности случайного исхода испытания, модель которого — вероятностное пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr})$, $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, К. Шеннон определил равенством

$$H(\mathrm{pr}_\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{pr}_i \log_a(1/\mathrm{pr}_i), \tag{3.18}$$

в котором $a > 1$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{x_i\})$, $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ — мера неопределенности[1] события $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, $H(\mathrm{pr}_\cdot)$ — ее математическое ожидание, называемое *энтропией распределения* $\mathrm{pr}_\cdot \sim \{\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_k\}$, см. рис. 3.5.

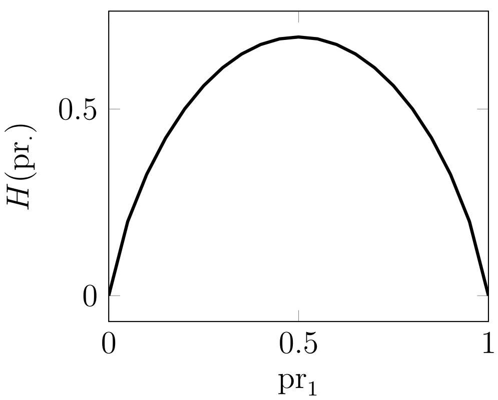


Рис. 3.5: Энтропия распределения вероятностей $\mathrm{pr}_\cdot \sim \{\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 = 1 - \mathrm{pr}_1\}$ в зависимости от pr_1. Основание логарифма в (3.18) выбрано равным e

Значение $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ можно интерпретировать и как меру относительного количества информации[2] в наблюдении исхода $\{x_i\}$ испытания, $i = 1, \ldots, k$.

Заметим, что выражение для энтропии $H(\mathrm{pr}_\cdot)$ (3.18) и ее содержательная интерпретация в значительной степени обусловлены ЗБЧ (ЗБЧ) [54]. Действительно, пусть $\nu_i^{(n)} = n_i/n$ — частота события $\xi_i = x_i$, $i = 1, \ldots, k$, в последовательности $\zeta^{(n)}$ n взаимно независимых испытаний. Тогда вероятность такой последовательности $\mathrm{Pr}(\zeta^{(n)}) = \mathrm{pr}_1^{n_1} \ldots \mathrm{pr}_k^{n_k} = a^{n \sum\limits_{i=1}^{k} \nu_i^{(n)} \log_a \mathrm{pr}_i}$, а в силу ЗБЧ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall n > n(\varepsilon)$

[1] Чем меньше pr_i, тем больше неопределенность события $\{x_i\}$, тем больше мера $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ неопределенности, относительная, ибо $\log_a(\cdot) = (\log_a b) \cdot \log_b(\cdot)$, $b > 1$, $i = 1, \ldots, k$.

[2] Чем меньше pr_i, тем неожиданнее событие $\{x_i\}$, тем больше в наблюдении $\{x_i\}$ информации $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

$\Pr^{\xi}(\bigcap\limits_{i=1}^{k}\{|\nu_i^{(n)}-\mathrm{pr}_i|<\varepsilon\})>1-\varepsilon$, где условия

$$|\nu_i^{(n)}-\mathrm{pr}_i|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k, \tag{3.19}$$

выделяют среди всех реализаций n испытаний множество $D(\varepsilon,n)$ *«типичных реализаций»*, ибо вероятность $\Pr^{\xi}(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\{|\nu_i^{(n)}-\mathrm{pr}_i|\geqslant\varepsilon\}) = 1-\Pr(\bigcap\limits_{i=1}^{k}\{|\nu_i^{(n)}-\mathrm{pr}_i|<\varepsilon\})<\varepsilon$ всех остальных реализаций при достаточно больших n можно считать сколь угодно малой. При этом согласно условиям (3.19) вероятность каждой «типичной реализации» $a^{n\sum\limits_{i=1}^{k}\nu_i^{(n)}\log_a \mathrm{pr}_i}\in[a^{-n(H(\mathrm{pr.})-\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{k}\log_a\mathrm{pr}_i)},a^{-n(H(\mathrm{pr.})+\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{k}\log_a\mathrm{pr}_i)}]$ и при $\varepsilon\ll\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mathrm{pr}_i$ сколь угодно близка к $a^{-nH(\mathrm{pr.})}$, а их число близко к $a^{nH(\mathrm{pr.})}$ и ровно столько же различных сообщений (информации) можно закодировать типичными последовательностями при достаточно большом n. Точнее, дело обстоит следующим образом [54].

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\mathrm{pr}_i>0$, $i=1,\dots,k$, $0<\varepsilon<1$, $D(\varepsilon,n)$ — *множество реализаций длины* n, *удовлетворяющих условиям* (3.19), $N(D(\varepsilon,n))$ — *число реализаций в* $D(\varepsilon,n)$, $\Pr(\zeta^{(n)})$ — *вероятность реализации* $\zeta^{(n)}\in D(\varepsilon,n)$. *Тогда* $\exists\, n(\varepsilon)\ \forall\, n>n(\varepsilon)$ $\exp(n(H-\varepsilon))\leqslant N(D(\varepsilon_1,n))\leqslant\exp(n(H+\varepsilon))$, $\zeta^{(n)}\in D(\varepsilon,n)$, *где* $H=H(\mathrm{pr.})$ *в* (3.18) *при* $a=e$, $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon,\varepsilon/(-2\sum\limits_{i=1}^{k}\ln\mathrm{pr}_i)\}$, *и* $\Pr(D(\varepsilon_1,n))\to1$ *при* $n\to\infty$.

3.2.2 Энтропии субъективных распределений но. э., моделирующего неопределённые высказывания м.-и., как меры их информативности/неопределённости

Определим как формальные аналоги шенноновской энтропии (3.18) энтропии распределений $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ но. э. $\widetilde{x}$, моделирующего но. в. м.-и. об истинности возможных его значений $x_1,\dots,x_k$ (в первом варианте мер Pl и Bel),

$$H(t^{\widetilde{x}})=\max_{x\in X}\min\{t^{\widetilde{x}}(x),\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\}=\underset{x\in X}{+}(t^{\widetilde{x}}(x)\times\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x))=\mathrm{pl}_{t^{\widetilde{x}}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)), \tag{3.20}$$

$$\widehat{H}(\widehat{t}^{\widetilde{x}})=\min_{x\in X}\max\{\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x),t^{\widetilde{x}}(x)\}=\underset{x\in X}{\widehat{+}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\mathbin{\widehat{\times}}t^{\widetilde{x}}(x))=\mathrm{bel}_{\widehat{t}^{\widetilde{x}}}(t^{\widetilde{x}}(\cdot)). \tag{3.21}$$

В (3.20) $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *информативность* (аналог $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ в (3.18)) *но. в.* м.-и., *согласно которому* $\widetilde{x}=x_i$, $t^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *правдоподобие* (аналог pr_i в (3.18)) *его истинности*, $i=1,\dots,k$, а $H(t^{\widetilde{x}})$ — *относительная информативность но. в. о правдоподобии истинности равенств* $\widetilde{x}=x_i$, $i=1,\dots,k$, которую назовем *информативностью* но. в., моделью которого является но. э. $\widetilde{x}$, или короче — *информативностью* $\widetilde{x}$, см. рис. 3.6.

В (3.21) $t^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *неопределенность* (аналог $\log_a(1/\mathrm{pr}_i)$ в (3.18)) *но. в.* м.-и., *согласно которому* $\widetilde{x}\neq x_i$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x_i)$ — *доверие* (аналог pr_i в (3.18)) *его истинности*, $i=1,\dots,k$, а $\widehat{H}(\widehat{t}^{\widetilde{x}})$ — *относительная неопределенность но. в. о довериях истинности неравенств* $\widetilde{x} \neq x_i$, $i = 1, \dots, k$, которую назовем *неопределенностью* но. в., моделью которого является но. э. $\widetilde{x}$, или *неопределённостью* $\widetilde{x}$.

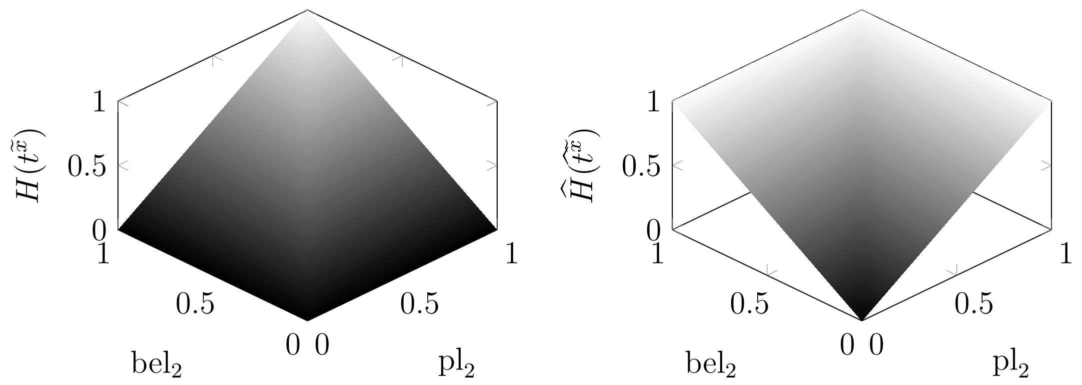


Рис. 3.6: Энтропии $H(t^{\widetilde{x}}) = \min\{\mathrm{pl}_2, \mathrm{bel}_2\}$ и $\widehat{H}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) = \max\{\mathrm{pl}_2, \mathrm{bel}_2\}$ распределений правдоподобия $t^{\widetilde{x}}(1) = 1$, $t^{\widetilde{x}}(2) = \mathrm{pl}_2$ и доверия $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(1) = 0$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(2) = \mathrm{bel}_2$ в первом варианте правдоподобия и доверия как функциии pl_2 и bel_2

Если меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ дуально изоморфны, т. е. если для некоторой функции $\theta(\cdot) \in \Theta$ $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot) = \theta \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, то энтропии

$$H(t^{\widetilde{x}}) = H_\theta(t^{\widetilde{x}}) = \underset{x \in X}{+}(t^{\widetilde{x}}(x) \times \theta \circ t^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{pl}_{t^{\widetilde{x}}}(\theta \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)), \tag{3.22}$$

$$\widehat{H}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) = \widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) = \underset{x \in X}{\widehat{+}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \mathbin{\widehat{\times}} \theta^{-1} \circ \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{bel}_{\widehat{t}^{\widetilde{x}}}(\theta^{-1} \circ \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)). \tag{3.23}$$

Замечание 3.2.1. В определениях энтропий (3.22), (3.23) использованы две шкалы: L и $\widehat{L} = \theta L$. Если при переходе к шкалам γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$ $\theta(\cdot) \in \Theta$ выбирается произвольно, то $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \{\theta' \circ \gamma \circ \theta'^{-1}(\cdot),\ \theta' \in \Theta\}$ и если, в частности, преобразование $\theta(\cdot)$, связывающее шкалы L и $\widehat{L}$, остаётся неизменным, то $\widehat{\gamma}(\cdot) = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1}(\cdot)$ и, как нетрудно проверить, $H_\theta(t^{\widetilde{x}}) \to H_\theta(\gamma \circ t^{\widetilde{x}})$. Если же шкалы преобразуются одинаково, $L \to \gamma L$, $\widehat{L} \to \gamma\widehat{L}$, то $\theta(\cdot) \to \theta_\gamma(\cdot) = \gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1}(\cdot)$ и $H_\theta(t^{\widetilde{x}}) \to H_{\theta_\gamma}(\gamma \circ t^{\widetilde{x}}) = \gamma(H_\theta(t^{\widetilde{x}}))$.

Нетрудно убедиться, что энтропии (3.20)–(3.22) обладают свойствами, формально подобными свойствам энтропии (3.18). Например, если $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y) = t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y) \times t^{\widetilde{y}}(y)$, $x \in X$, $y \in Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, где $t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot)$ — распределение условного правдоподобия, то согласно (3.22), подобно шенноновской энтропии, $H_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}) = \underset{x \in X,\, y \in Y}{+}(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y) \times \theta \circ t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y)) = H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}) + H_\theta(t^{\widetilde{y}})$, где $H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}) = \underset{y \in Y}{+}((H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|y))) \times t^{\widetilde{y}}(y))$ — условная энтропия, $H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|y))$ — энтропия условного распределения, $y \in Y$, а если но. э. $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ независимы, $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y) = t^{\widetilde{x}}(x) \times t^{\widetilde{y}}(y)$, $x \in X$, $y \in Y$, то информативность модели пары но. э. $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$

$$H_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}) = H_\theta(t^{\widetilde{x}}) + H_\theta(t^{\widetilde{y}}) = \max\{H_\theta(t^{\widetilde{x}}), H_\theta(t^{\widetilde{y}})\}. \tag{3.24}$$

Поэтому для *независимых* копий $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ но. э. $\widetilde{x}$

$$H_\theta(t^{\widetilde{x}_1} \times t^{\widetilde{x}_2}) = H_\theta(t^{\widetilde{x}}), \tag{3.25}$$

т. е. независимо повторенное но. в. не несет дополнительной информации, в то время как в подобной ситуации информация (3.18) удваивается: $\sum\limits_{i,j=1}^{k} \mathrm{pr}_i \mathrm{pr}_j \log_a(1/(\mathrm{pr}_i \mathrm{pr}_j)) = 2\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{pr}_i \log(1/\mathrm{pr}_i)$. Аналогично для неопределенности модели пары $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ независимых[1] копий $\widetilde{x}$

$$\widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}} \widehat{\times} \widehat{t}^{\widetilde{y}}) = \widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}) \widehat{+} \widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{y}}) = \widehat{H}_{\theta^{-1}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}), \tag{3.26}$$

т. е. независимо повторенные но. в. не уменьшают неопределенности уже высказанного суждения.

Дело в том, что в данном варианте теории мер Pl, Bel и pl-, bel-интегралов нет аналога ЗБЧ. Например, но. э. $\widetilde{y}^{(n)} = \widetilde{x}^1 + \ldots + \widetilde{x}^n$ и $\widetilde{z}^{(n)} = \widetilde{x}^1 \times \ldots \times \widetilde{x}^n$, где $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n$ суть взаимно независимые копии но. э. $\widetilde{x}$ со значениями в $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, распределены как но. э. $\widetilde{x}$, а именно, $t^{\widetilde{y}^{(n)}}(y) = \max\{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} t^{\widetilde{x}}(x^i),\ x^1, \ldots, x^n \in X,\ \mathop{+}\limits_{j=1}^{n} x^j = y\} = t^{\widetilde{x}}(y)$, $y \in X$, $t^{\widetilde{z}^{(n)}}(z) = \max\{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} t^{\widetilde{x}}(x^i),\ x^i, \ldots, x^n \in X,\ \mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} x^j = z\} = t^{\widetilde{x}}(z)$, $z \in X$, $n = 1, 2, \ldots$

Что касается «типичных» последовательностей, то если значения $x_1, \ldots, x_k$ но. э. $\widetilde{x}$ упорядочены так, что $1 = \mathrm{pl}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pl}_k > 0$, где $\mathrm{pl}_i = t^{\widetilde{x}}(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, и $\widetilde{x}^{(n)}$ — последовательность n *взаимно субъективно независимых* копий но. э. $\widetilde{x}$, то её правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}^{(n)}) = \min\{\underbrace{\mathrm{pl}_1, \ldots, \mathrm{pl}_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\mathrm{pl}_k, \ldots, \mathrm{pl}_k}_{n_k}\}$, а последовательность $\widetilde{x}^{(n)}$ следует считать «типичной», если $n_k > 0$, её правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}^{(n)}) = \mathrm{pl}_k$. Вероятность $\mathrm{Pr}^{\xi^{(n)}}$, с которой максимально согласована мера $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}^{(n)}}$, где $\xi^{(n)}$ — последовательность *статистически зависимых* случайных элементов $\xi^1, \ldots, \xi^n$, определяет вероятность $\overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)} = (k^n - (k-1)^n)\mathrm{pr}_k^{(n)} = 1 - \sum\limits_{m=1}^{k-1}(m^n - (m-1)^n)\mathrm{pr}_m^{(n)}$ *всех* $k^n - (k-1)^n$ *подпоследовательностей* $\xi^{(n)}$, *содержащих исходы* $\xi^i = x_k$, $i = 1, \ldots, n$, см. [18, лемма 3], *определившие правдоподобие* pl_k *типичной последовательности* $\widetilde{x}^{(n)}$. Так как при $n \to \infty$ $\overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)} \log_a \overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)} + (1 - \overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)}) \log_a(1 - \overline{\mathrm{pr}}_k^{(n)}) \to 0$, то интерпретация энтропий (3.20), (3.21) существенно отличается от интерпретации шенноновской энтропии (3.18), оценивающей относительное количество информации, которое можно закодировать типичными последовательностями. Заметим, что если правдоподобие Pl определяет субъективную модель вероятностной случайности $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{Pl}$, то согласно теореме 3.1.1, если частота события x_i $\nu_i^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{pr}_i$ то вероятностный ЗБЧ «индуцирует» субъективный ЗБЧ $\gamma_e(\nu_i^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma_e(\mathrm{pr}_i) = \mathrm{pl}_i$, $i = 1, \ldots, k$, и субъективную энтропию шенноновского ти-

[1] Напомним, что $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y) = t^{\widetilde{x}}(x) \times t^{\widetilde{y}}(y) \Leftrightarrow \widehat{t}^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y) = \theta \circ t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y) = \theta(t^{\widetilde{x}}(x) \times t^{\widetilde{y}}(y)) = \theta \circ t^{\widetilde{x}}(x) \widehat{\times} \theta \circ t^{\widetilde{y}}(y) = \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \widehat{\times} \widehat{t}^{\widetilde{y}}(y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

па $\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_e(\mathrm{pr}_i) \log_a(\gamma_e(1/\mathrm{pr}_i))$, которую однако, выбирая γ_e, можно сделать сколь угодно близкой как к её максимальному значению $\log_a(1/k)$, так и к минимальному 0.

З а м е ч а н и е 3.2.2. Согласно исследованиям информативности распределения возможностей значений нечёткого элемента *информативность распределения* но. э. следует определять «относительной степенью локализации» его значений: если $t_1^{\widetilde{x}}(x) \leqslant t_2^{\widetilde{x}}(x)$, $x \in X$, то распределение $t_1^{\widetilde{x}}(\cdot)$ не менее информативно, чем $t_2^{\widetilde{x}}(\cdot)$, несёт не меньше информации, *позволяющей локализовать возможные значения* но. э. $\widetilde{x}$, чем $t_2^{\widetilde{x}}(\cdot)$ [40; 55; 56]. В данном случае такое определение информативности не позволит локализовать возможные значения $\widetilde{x}$, поскольку, как правило, распределения $t_1^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $t_2^{\widetilde{x}}(\cdot)$ заданы в разных шкалах, и поточечное сравнение их значений лишено смысла, ибо все распределения $\gamma \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, эквивалентны. Бо́льшую информативность (specificity) распределения $t_1^{\widetilde{x}}$ можно охарактеризовать строгим включением его носителя $\{x \in X,\, t_1^{\widetilde{x}}(x) > 0\} \subset \{x \in X,\, t_2^{\widetilde{x}}(x) > 0\}$, но и в этом случае такая точка зрения не имеет ничего общего с числом типичных последовательностей событий как носителей информации.

В данном варианте мер правдоподобия и доверия информация, используемая в задаче оптимизации решения, может быть определена как *непосредственно определяющая качество решения*, подобно информации Р. Фишера, определяющей качество несмещенного параметрического оценивания, см. [19, с. 103 и §3.7].

Обзор исследований мер неопределённости и информативности дан в [40].

3.2.3 Энтропии распределений но. э. $\widetilde{x}$ в третьем варианте мер правдоподобия и доверия

В третьем варианте, см. § 1.9.2, есть *«собственный»* ЗБЧ и есть аналоги центральной предельной теоремы в теории вероятностей, см. [10, §4.4 гл. 4]. Есть и ЗБЧ, *индуцированный* вероятностным ЗБЧ для вероятности, субъективной моделью которой служит пространство с правдоподобием и доверием, поскольку согласно (3.11) $\mathrm{pl}_i = (\mathrm{pr}_i/\mathrm{pr}_1)^{\beta_i}$ и $(n_i/n_1)^{\beta_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{pl}_i$, где $n_i/n_1 = \nu_i^{(n)}/\nu_1^{(n)}$, отношение частоты события $\{x_i\}$ к частоте события $\{x_1\}$, $i = 2, \dots, k$. Этот факт будет использован несколько позже, а сейчас, чтобы сравнить с результатами исследования энтропий, полученными в § 3.2.2, определим в третьем варианте подобно (3.22), (3.23) относительную информативность распределения правдоподобий но. э. $\widetilde{x}$ равенством

$$H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}}) = \mathop{+'}_{x \in X}(t^{\widetilde{x}}(x) \times' \theta'_\beta \circ t^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{pl}'_{t^{\widetilde{x}}}(\theta'_\beta \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \max_{x \in X}(t^{\widetilde{x}}(x) \otimes \log_\beta(t^{\widetilde{x}}(x))^{-1}), \quad (3.27)$$

относительную неопределенность распределения доверий но. э. $\widetilde{x}$

$$H_{\theta'^{-1}_\beta}(\widehat{t^{\widetilde{x}}}) = \mathop{\widehat{+}'}_{x \in X}(\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) \widehat{\times}' \theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)) = \mathrm{bel}'_{\widehat{t^{\widetilde{x}}}}(\theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot)) =$$

$$= \min_{x\in X}(\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) \oplus \beta^{-\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)}) = \min_{x\in X}(\log_\beta(t^{\widetilde{x}}(x))^{-1} \oplus t^{\widetilde{x}}(x)), \quad (3.28)$$

где $\oplus$ и $\otimes$ суть символы «обычных» сложения и умножения, см. рис. 3.7. Подобно (3.22), (3.23) энтропии (3.27), (3.28) *определены для пары шкал* L' *и* $\widehat{L}' = \theta'_\beta L'$, и если при пребразованиях $L' \to \gamma'_\alpha L'$, $\widehat{L}' \to \widehat{\gamma}'_{\alpha'}\widehat{L}'$, $\alpha, \alpha' > 0$, $\theta'_\beta(\cdot)$, $\beta > 1$, выбирается произвольно, то должно быть выпонено включение $\widehat{\gamma}'_{\alpha'}(\cdot) \in \{\theta'_\beta \circ \gamma'_\alpha \circ \theta'_\beta(\cdot), \beta > 1\}$, см. § 1.9.2. Поскольку в данном случае $\forall\, \beta > 1$ $\theta'_\beta \circ \gamma'_\alpha \circ {\theta'_\beta}^{-1}(\cdot) = \widehat{\gamma}'_\alpha(\cdot)$, то, независимо от выбора $\beta > 1$, $\alpha' = \alpha$, $L' \to \gamma'_\alpha L'$, $\widehat{L}' \to \widehat{\gamma}'_{\alpha'}\widehat{L}'$ и $H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}}) \to H_{\theta'_\beta}(\gamma'_\alpha \circ t^{\widetilde{x}})$. Аналогично, $H_{{\theta'_\beta}^{-1}}(\widehat{t^{\widetilde{x}}}) \to H_{{\theta'_\beta}^{-1}}(\widehat{\gamma}'_\alpha \circ \widehat{t^{\widetilde{x}}})$.

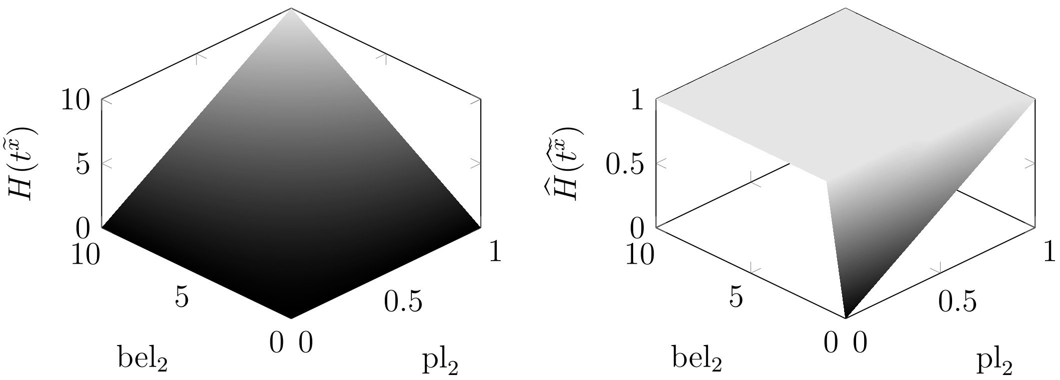


Рис. 3.7: Энтропии $H(t^{\widetilde{x}}) = \mathrm{pl}_2 \otimes \mathrm{bel}_2$ и $\widehat{H}(\widehat{t^{\widetilde{x}}}) = \min\{1, \mathrm{pl}_2 \oplus \mathrm{bel}_2\}$ распределений правдоподобия $t^{\widetilde{x}}(1) = 1$, $t^{\widetilde{x}}(2) = \mathrm{pl}_2$ и доверия $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(1) = 0$, $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(2) = \mathrm{bel}_2$ в третьем варианте правдоподобия и доверия как функциии pl_2 и bel_2

Однако в третьем варианте, в отличие от (3.25), (3.26) для Pl$'$-независимых[1] $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$

$$\max\{H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_1}(\cdot)), H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_2}(\cdot))\} \leqslant H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_1} \times' t^{\widetilde{x}_2}(\cdot,\cdot)) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \underset{x_1,x_2\in X}{+'}(t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \times' t^{\widetilde{x}_2}(x_2) \times' \log_\beta(t^{\widetilde{x}_1}(x) \times' t^{\widetilde{x}_2}(x))^{-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x_1,x_2\in X}[t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \otimes t^{\widetilde{x}_2}(x_2) \otimes \log_\beta(t^{\widetilde{x}_1}(x_1))^{-1}] \oplus$$
$$\oplus \max_{x_1,x_2\in X}[t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \otimes t^{\widetilde{x}_2}(x_2) \otimes \log_\beta(t^{\widetilde{x}_2}(x_2))^{-1}] = H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_1}(\cdot)) \oplus H_{\theta'_\beta}(t^{\widetilde{x}_2}(\cdot)). \quad (3.29)$$

Согласно (3.29) информативность пары независимых копий $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ но. э. $\widetilde{x}$ не меньше информативности но. э. $\widetilde{x}$, т. е. но. в., независимо высказанное м.-и. дважды, не менее информативно, чем высказанное один раз. Это можно интерпретировать как известный эффект, аналогичный эффекту подавления шума в подобной ситуации для информации (3.18): м.-и. *обращает внимание* на уже высказанное суждение. Но для относительной неопределенности и в этом варианте $\widehat{H}_{{\theta'}_\beta^{-1}}(\widehat{t^{\widetilde{x}_1}} \widehat{\times}' \widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(\cdot)) = \underset{x_1,x_2\in X}{\widehat{+}'}(\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1) \widehat{\times}' \widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2) \widehat{\times}' {\theta'}_\beta^{-1} \circ$ $\circ\, (\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\ \widehat{\times}'\ \widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2))) = \underset{x_1,x_2\in X}{\widehat{+}'}[\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\ \widehat{\times}'\ \widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\ \widehat{\times}'\ {\theta'}_\beta^{-1} \circ \widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)]\ \widehat{+}'\ (\underset{x_1,x_2\in X}{\widehat{+}'}[\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)\ \widehat{\times}'$

[1] Подобно определениям (3.18), (3.19) но. э. $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ Pl$'$-независимы, если $t^{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2}(x_1, x_2) = t^{\widetilde{x}_1}(x_1) \times' t^{\widetilde{x}_2}(x_2)$, Bel$'$-независимы, если $\widehat{t}^{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2}(x_1, x_2) = \widehat{t}^{\widetilde{x}_1}(x_1) \widehat{\times}' \widehat{t}^{\widetilde{x}_2}(x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)\ \widehat{\times}'\ \theta'^{-1}_\beta \circ \widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)]) = \min\{\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1) \oplus \beta^{-\widehat{t^{\widetilde{x}_1}}(x_1)}, \widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2) \oplus \beta^{-\widehat{t^{\widetilde{x}_2}}(x_2)}\} = \min\{\widehat{H}_{\theta'^{-1}_\beta}(t^{\widetilde{x}_1}(\cdot)),$ $\widehat{H}_{\theta'^{-1}_\beta}(t^{\widetilde{x}_2}(\cdot))\} = H_{\theta'^{-1}_\beta}(\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot))$ т. е. но. в., будучи независимо высказанным дважды, сохраняет его неопределенность.

Обратимся к ЗБЧ в третьем варианте, *индуцированным вероятностным* ЗБЧ и покажем, что *если* Pl', Bel' *определяют субъективную модель вероятностной случайности*, т. е. максимально согласованы с Pr, то *любая последовательность* $\widetilde{x}^{(n)}$ *взаимно* Pl-*независимых одинаково распределённых но. э.* $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n$ *может быть представлена как максимально* $\overline{\Gamma}'$-*согласованная*, см. § 3.1.3, *со случайной последовательностью* $\xi^{(n)}$ *взаимно независимых одинаково распределённых сл. э.* $\xi^1, \ldots, \xi^n$, *т. е. что в шкале* L' *правдоподобий*

$$\forall\, n = 1, 2, \ldots\ \exists\, \delta^{(n)} > 0\ \ \mathrm{pl}_1^{n_1} \ldots \mathrm{pl}_k^{n_k} = (\mathrm{pr}_1^{n_1} \ldots \mathrm{pr}_k^{n_k})^{\delta^{(n)}}, \tag{3.30}$$

где $\mathrm{pl}_j = \mathrm{Pl}(\widetilde{x}^i = x_j)$, $\mathrm{pr}_j = \mathrm{Pr}(\xi^i = x_j)$, n_j — *число равенств* $\xi^i = x_j$ *в последовательности* $\xi^1, \ldots, \xi^n$, $j = 1, \ldots, k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$, $i = 1, 2, \ldots$

Действительно, согласно (3.11) равенство (3.30) эквивалентно равенству

$$(\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1 n_1/n} \ldots (\mathrm{pr}_k/\mathrm{pr}_1)^{\beta_k n_k/n} = (\mathrm{pr}_1^{n_1/n} \ldots \mathrm{pr}_k^{n_k/n})^{\delta^{(n)}}, \tag{3.31}$$

а поскольку левая его часть и произведение в скобках справа содержатся в $(0, 1)$, найдётся $\delta^{(n)} \in (0, \infty)$, обеспечивающее равенство левой и правой частей в (3.31). Перепишем (3.31) в шкале $\widehat{L}'$ значений доверия, см. § 1.9.2,

$$\theta'_a((\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1 n_1/n}(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2 n_2/n} \ldots (\mathrm{pr}_k/\mathrm{pr}_1)^{\beta_k n_k/n}) = \theta'_a((\mathrm{pr}_1^{n_1/n} \ldots \mathrm{pr}_k^{n_k/n})^{\delta^{(n)}}), \tag{3.32}$$

где $\theta'_a(u) = \log_a u^{-1}$, $0 < u \leqslant 1$, $\theta'_a(0) = 0$, $a > 1$, и, устремив в (3.32) n к бесконечности, получим равенство:

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j \mathrm{pr}_j \log_a(\mathrm{pr}_j/\mathrm{pr}_1)^{-1} = \delta^{(\infty)} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{pr}_j \log_a \mathrm{pr}_j^{-1}, \tag{3.33}$$

где $\delta^{(\infty)} = \lim\limits_{n\to\infty} \delta^{(n)} = \delta(\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_k) < 1$ и учтено, что $n_j/n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \mathrm{pr}_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Согласно (3.11) и (3.18) равенство (3.33) можно записать как $\sum\limits_{j=1}^{k} \mathrm{pr}_j \log_a \mathrm{pl}_j^{-1} = \delta^{(\infty)} H(\mathrm{pr}_\cdot)$, где слева — *математическое ожидание меры субъективной информативности/неопределенности* $\log_a(1/\mathrm{pl}_j)$ события x_j, $j = 1, \ldots, k$,: чем меньше правдоподобие pl_j события $\{x_j\}$, тем оно неожиданнее, тем больше мера $\log_a(1/\mathrm{pl}_j)$ субъективной информативности события $\{x_j\}$. Чем меньше правдоподобие pl_j события $\{x_j\}$, тем больше его неопределённость, тем больше мера $\log_a(1/\mathrm{pl}_j)$ субъективной неопределённости события $\{x_j\}$, ср. с (3.27), (3.28).

Замечание 3.2.3. Авторам неизвестны работы, в которых рассматривается подобный вариант мер правдоподобия и доверия и энтропии их распределений.

3.3 Идентификация состояний НО. НЧ. О. Оптимальное субъективное правило идентификации

Рассмотрим задачу *идентификации*[1], в которой модель $M(x) = (Z, \mathcal{P}(Z), \mathrm{P}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot;x), \mathrm{N}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot;x))$ НО. НЧ. О.[2] и схемы наблюдения за ним задана зависящим от *неизвестного* параметра $x \in X$ распределением возможностей $g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)$, $z \in Z$, $k \in \{1,\ldots,q\} = K$, значений пары[3] $\zeta, \varkappa$ неопределенный нечеткий элементs (нч. э.) «наблюдение, состояние», первый из которых наблюдаем, а второй — нет. В задаче идентификации требуется по наблюдению $\zeta = z$ принять (чёткое, см. [7, §4.2]) решение $d(z;x) \in K$ о состоянии объекта, если известно, что м.-и. готов предложить свою *субъективную модель значений* $x \in X$, а возможность «потерь», сопутствующих решению $d(z;x)$ о состоянии НО. НЧ. О., находящегося в состоянии $k \in K$, равна $\mathrm{p}l_{k,d(z;x)}$, $z \in Z$.

Рассмотрим модель идентификации, в которой субъект, принимающий решения, для определения функции $\mathrm{p}l_{\cdot,\cdot}\colon K \times K \to L$ задаёт семейство пространств с возможностью $(\Lambda, \mathcal{P}(\Lambda), \mathrm{P}(\cdot|\cdot;d))$, $d \in K$, в котором Λ — пространство элементарных «потерь», $\mathcal{P}(\Lambda)$ — класс всех подмножеств Λ, $\mathrm{P}(\,\cdot\,|\,\cdot;d)\colon \mathcal{P}(\Lambda) \to L$ — переходная мера возможности для $(K, \mathcal{P}(K))$ и $(\Lambda, \mathrm{P}(\Lambda))$ при любом $d \in K$. Далее субъект, принимающий решения, *выделяет* множество $V \in \mathcal{P}(\Lambda)$ *существенных*, по его мнению, элементарных «потерь» и *полагает* $\mathrm{p}l_{k,d} = \mathrm{P}(V\,|\,k,d)$, $(k,d) \in K \times K$. Качество идентификации субъект, принимающий решения, *оценивает* зависящей от неизвестного $x \in X$ *возможностью потерь*, см. [8, (30)],

$$\mathrm{P\,L}(d(\cdot;\cdot);x) = \sup_{z\in Z}\max_{k\in K}\min\{\mathrm{p}l_{k,d(z;x)}, g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)\}, \tag{3.34}$$

сопутствующих правилу идентификации, заданному зависящей от неизвестного $x \in X$ решающей функцией $d(\cdot;x)\colon Z \to K$.

Пусть для каждых $(z;x) \in Z \times X$ функция $d^*(\cdot;\cdot)\colon Z \times X \to K$ определена как решение задачи

$$\mathrm{P}_d(z;x) = \max_{k\in K}\min\{\mathrm{p}l_{k,d}, g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)\} \sim \min_{d\in K}. \tag{3.35}$$

Для любой функции $d^*(\cdot;\cdot)\colon Z \times X \to K$ функция $d^*(\cdot;x)\colon Z \to K$ при любом $x \in X$

[1] Заметим, что рассмотренные в [8, §1.1–1.3] нечеткие задачи идентификации и оценивания в [8, §1.4–1.6] заменой мер P и N на меры Pl и Bel превращаются соответственно в субъективные задачи: идентификации состояния объекта, субъективная модель которого зависит от неизвестного параметра, и оценивания характеристики объекта, модель которого задана как субъективная. Их решения будут подобны найденным в [8], но характерны для § 3.3 в данном пособии. Читателю рекомендуется эти задачи поставить и получить их решения.

[2] Неопределённым нечётким называется объект (элемент), моделью которого служит нечёткое пространство, см. [7, замечание 1.1] и § 2.1, зависящее от неизвестного параметра.

[3] Далее для простоты будем считать, что $\mathrm{P}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot;x)$ и $\mathrm{N}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot;x)$ при любом $x \in X$ дуально согласованы, поэтому $M(x) = (Z, \mathcal{P}(Z), \mathrm{P}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot;x))$, $x \in X$.

удовлетворяет условию

$$d^*(z;x) \in D^*(z;x) \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in K,\ \mathrm{P}_d(z;x) = \min_{d' \in K} \mathrm{P}_{d'}(z;x)\},\ z \in Z. \tag{3.36}$$

и согласно (3.34), (3.35), (3.36), как нетрудно увидеть, является решением задачи $\min\limits_{d(\cdot;\cdot)} \mathrm{P\,L}(d(\cdot;\cdot);x) = \mathrm{P\,L}(d^*(\cdot;x),x) = \sup\limits_{z\in Z} \mathrm{P}_{d^*(z;x)}(z;x)$, (полученным субъектом, принимающим решения!), минимизирующим для каждого $x \in X$ возможность потерь (3.34) и *определяющим оптимальное для* м.-и. *субъективное правило идентификации* $\widetilde{d}^*(z) = d^*(z,\widetilde{x})$, $z \in Z$, *выбравшего* но. э. $\widetilde{x}$ *в качестве своей субъективной модели неизвестного* $x \in X$.

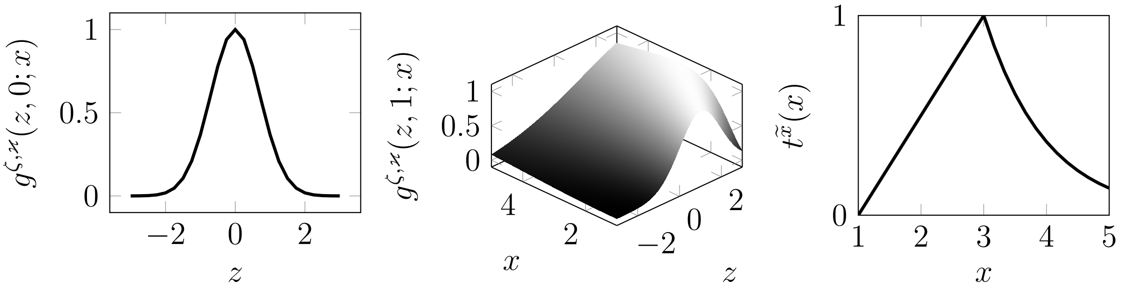
Обозначим:

- $t^{\widetilde{x}}(x)$ и $\widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x)$ заданные м.-и. правдоподобие и доверие истинности его субъективных суждений, согласно которым $\widetilde{x} = x$ и $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$,
- $\widetilde{(\zeta,\varkappa)}$ — неопределенный нч. э., заданный субъективным распределением $g^{\widetilde{\zeta,\varkappa}}(z,k) \stackrel{\text{def}}{=} g^{\zeta,\varkappa}(z,k;\widetilde{x}) = \widetilde{g}^{\zeta,\varkappa}(z,k)$, $z \in Z$, $k \in K$, возможностей его значений,
- $\widetilde{d}^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} d^*(z;\widetilde{x})$, $z \in Z$, — соответствующее выбору м.-и. и субъекта, принимающего решения, оптимальное субъективное правило идентификации состояния НО. НЧ. О.,
- $\mathrm{p}l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{P\,L}(d^*(\cdot;x);x)$ — неопределенную, минимальную для каждого $x \in X$, возможность потерь и $\widetilde{\mathrm{p}l} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{p}l(\widetilde{x})$ — *соответствующую ей субъективную минимальную возможность потерь*; тогда
- $t^{\widetilde{d}^*(z)}(d;z) = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ d^*(z;x) = d\}$ и $\widehat{t}^{\,\widetilde{d}^*(z)}(d;z) = \inf\{\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ d^*(z;x) = d\}$ суть правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений м.-и. и субъекта, принимающего решения, согласно которым $\widetilde{d}^*(z) = d$ и соответственно $\widetilde{d}^*(z) \neq d$, $d \in K$, $z \in Z$, см. рис. 3.8. Для *принятия* решения субъекту, принимающему решения, возможно, потребуется *статистическое моделирование* правила $\widetilde{d}^*(z)$, позволяющее *субъективное решение принимать как случайное*, см. [8, §2.1], [10], § 3.1.

Для субъективной минимальной возможности «потерь» $\widetilde{\mathrm{p}l}$

$$\begin{aligned} t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{\mathrm{p}l} = \mathrm{p}) = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \mathrm{p}l(x) = \mathrm{p}\}, \\ \widehat{t}^{\,\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{\mathrm{p}l} \neq \mathrm{p}) = \inf\{\widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \mathrm{p}l(x) = \mathrm{p}\} \end{aligned} \tag{3.37}$$

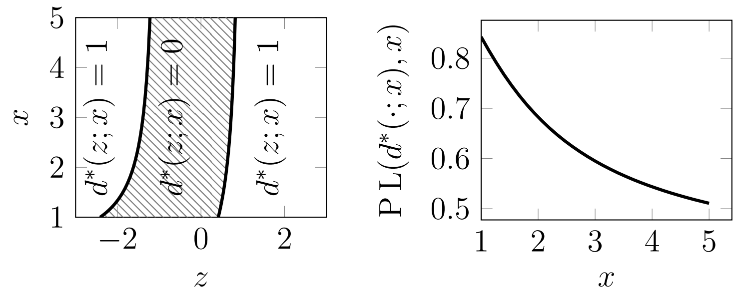
суть правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений м.-и. и субъекта, принимающего решения, согласно которым $\widetilde{\mathrm{p}l} = \mathrm{p}$ и $\widetilde{\mathrm{p}l} \neq \mathrm{p}$, $\mathrm{p} \in [0,1]$. *Качество* субъективного оптимального правила $\widetilde{d}^*(\cdot) = d^*(\cdot;\widetilde{x})\colon Z \to K$, *охарактеризуем значениями* $\mathrm{p} \in L$ *субъективной возможности «потерь», при которых равенство* $\widetilde{\mathrm{p}l} = \mathrm{p}$ *имеет максимальное правдоподобие, а неравенство* $\widetilde{\mathrm{p}l} \neq \mathrm{p}$ — *минимальное доверие*, а именно, чем меньше значения $\operatorname{argmax}\limits_{\mathrm{p}\in[0,1]} t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p})$ и $\operatorname{argmin}\limits_{\mathrm{p}\in[0,1]} \widehat{t}^{\,\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p})$ в (3.37), тем лучше оптимальное



(а) «Срез» распределения $g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)$ при $k=0$

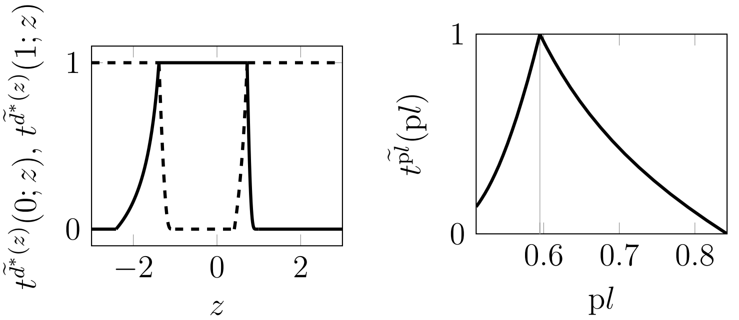
(б) «Срез» распределения $g^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)$ при $k=1$

(в) Распределение правдоподобий но. э. $\widetilde{x}$



(г) Оптимальное правило идентификации $d^*(z;x)$

(д) Минимальная возможность потерь как функция x



(е) Оптимальное субъективное правило $\widetilde{d}^*(\cdot)$

(ж) Распределение правдоподобий $\widetilde{\mathrm{p}l}$

Рис. 3.8: Пример идентификации состояний неопределенного нечеткого объекта. Модель объекта и схемы наблюдений за ним задана распределением возможностей (а) $g^{\zeta,\varkappa}(z,0;x) = \exp(-z^2)$, (б) $g^{\zeta,\varkappa}(z,1;x) = \exp(-(z-x)^2/(1+x^2))$, $z \in Z = \mathcal{R}^1$, зависящим от неизвестного параметра $x \in X = [1,+\infty)$, моделируемого (в) но. э. $\widetilde{x}$. С. п. р. задал $\mathrm{p}l_{k,d} = 1$, $k \neq d$, $\mathrm{p}l_{k,d} = 0$, $k = d$, $k, d \in \{0,1\}$. При заданных значениях параметра x оптимальное решающее правило показано на (г), а сопутствующая ему минимальная возможность потерь — на (д). На рис. (е) показано оптимальное субъективное правило идентификации (сплошная линия — правдоподобие принятия решения $d=0$, пунктирная — решения $d=1$), а на рис. (ж) — сопутствующая ему субъективная минимальная возможность потерь (выделено ее вполне правдоподобное значение, характеризующее качество субъективного оптимального правила) субъективное правило решения $d^*(\cdot;\widetilde{x})$. Если $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to L$ полунепрерывна сверху, а $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$ полунепрерывна снизу, то $\operatorname*{argmax}_{\mathrm{p}\in[0,1]} t^{\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p}) = \min\{\mathrm{p}l(x)|x \in X,\ t^{\widetilde{x}}(x) = 1\}$, $\operatorname*{argmin}_{\mathrm{p}\in[0,1]} \widehat{t}^{\,\widetilde{\mathrm{p}l}}(\mathrm{p}) = \min\{\mathrm{p}l(x)|x \in X,\ \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) = 0\}$.

Заметим, что оптимальное правило идентификации $d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot)$, отвечающее правдоподобию истинности $\mathrm{pl} \in \mathcal{L}$ модели НО. НЧ. О., определяется как решение задачи $\min_{d(\cdot)} \sup\{\mathrm{PL}(d(\cdot);x)|x \in X_{\mathrm{pl}}\} = \mathrm{PL}(d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot))$, где $X_{\mathrm{pl}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{pl}\}$ и $\mathrm{PL}(d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot)) \geqslant \sup\{\mathrm{pl}(x)|x \in X_{\mathrm{pl}}\}$, $\mathrm{pl} \in \mathcal{L}$.

3.4 Экспертное восстановление распределений нечёткого и неопределённого нечёткого элементов

Рассмотрим вначале восстановление коллективной экспертной оценки распределения правдоподобий

$$\mathrm{p}_j = \mathrm{P}(\xi = x_j),\ j = 1, \ldots, n, \tag{3.38}$$

нч. э. ξ, неформальная модель которого в той или иной степени известна экспертам.

3.4.1 Экспертное восстановление распределения нечеткого элемента. Проверка несогласованности мнений экспертов

Рассмотрим метод восстановления распределения нч. э., в котором каждый из N экспертов представляет решение, указав перестановку $\pi(\cdot)\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, упорядочивающую, по его мнению, $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ в (3.38) по убыванию.

Пусть $\pi_i(\cdot)$ — перестановка, упорядочивающая, по мнению i-го эксперта, возможности в (3.38):

$$1 = \mathrm{p}_{i_1} > \mathrm{p}_{i_2} > \ldots > \mathrm{p}_{i_n} > 0, \tag{3.39}$$

где $\mathrm{p}_{i_k} = (\pi_i * \mathrm{p})_k = \mathrm{p}_{\pi_i^{-1}(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, N$, и для простоты считается, что *эксперты обязаны использовать только строгие неравенства.*

Определим расстояние $r(\pi_i, \pi_s)$ между «мнениями» i-го и s-го экспертов равенством

$$r(\pi_i, \pi_s) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (\pi_i^{-1}(k) - \pi_s^{-1}(k))^2\Big)^{1/2} \equiv \Big(\sum_{k=1}^{n} (i_k - s_k)^2\Big)^{1/2}. \tag{3.40}$$

Пусть $\pi_*^{-1}(1), \ldots, \pi_*^{-1}(n)$ — номера, упорядочивающие (не обязательно строго) значения возможностей, которые указал бы «нейтральный» эксперт, выражая мнения N экспертов. Тогда перестановка π_* может быть определена как решение задачи

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \pi_*) = \min_{\pi} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \pi), \tag{3.41}$$

в которой минимум вычисляется на множестве всех перестановок $\pi(\cdot)$.

В задаче (3.41), как и в задаче (2.7), можно получить, в известном смысле, полное решение, а именно: найти коллективную экспертизу π_* и оценить, в какой степени ей следует доверять. Так как в (3.41), как и в (2.7),

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \pi) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \overline{\pi}) + r^2(\overline{\pi}, \pi), \tag{3.42}$$

где $\overline{\pi}^{-1}(k) = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 \pi_i^{-1}(k)$, $k = 1, \ldots, n$, то задача (3.41) эквивалентна задаче отыскания перестановки π_*, ближайшей к функции $\overline{\pi}$: $r^2(\overline{\pi},\ \pi_*) = \min\limits_{\pi} r^2(\overline{\pi}, \pi)$. Если для некоторой перестановки $\widehat{\pi}$ $\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(1)) \leqslant \ldots \leqslant \overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(n))$, то, очевидно, $\pi_* = \widehat{\pi}$, ибо $\sum\limits_{k=1}^{n}(\overline{\pi}^{-1}(k) - \widehat{\pi}^{-1}(k))^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(k)) - k)^2$ и для любых целых $s, k = 1, \ldots, n$, $1 \leqslant s \leqslant s + k \leqslant n$, $(\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s)) - s)^2 + (\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s+k)) - s + k)^2 - (\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s+k)) - s)^2 - (\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s)) - s + k)^2 = 2k(\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s)) - \overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s+k))) \leqslant 0$.

В *вероятностной модели экспертных решений*, согласно которой *эксперты некомпетентны и принимают решения «взаимно независимо и наугад»*, значение первого слагаемого в правой части (3.42) позволит судить, *насколько следует доверять* «коллективной экспертизе» π_*.

Обозначим $\omega = (\widetilde{\pi}_1, \ldots, \widetilde{\pi}_N)$ — кортеж N случайных взаимно независимых перестановок, Π^N — класс всех $(n!)^N$ таких ω, $\Pr(\{\omega\}) = (n!)^{-N}$, $\omega \in \Pi^N$, — значения, определяющие вероятность $\Pr$ на $(\Pi^N,\ \mathcal{P}(\Pi^N))$. Вероятностное пространство $(\Pi^N, \mathcal{P}(\Pi^N), \Pr)$ моделирует заключения N экспертов, взаимно независимо принимающих решения наугад: все $(n!)^N$ возможных их экспертиз равновероятны.

Статистика $t(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\widetilde{\pi}_i, \overline{\pi})$, $\omega \in \Pi^N$, принимает значения в $T = \{t(\omega),\ \omega \in \Pi^N\} = \{t_1, \ldots, t_K\}$ с вероятностями $\mathrm{pr}_k = \Pr(\{\omega \in \Pi^N,\ t(\omega) = t_k\})$, $k = 1, \ldots, K$, которые определим упорядоченными по убыванию: $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_K$. Если H — гипотеза, *согласно которой эксперты принимают решения наугад и взаимно независимо*, то критерий, отвергающий H ошибочно с вероятностью $\leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, определится критическим множеством $T_\varepsilon = \{t_{k(\varepsilon)}, t_{k(\varepsilon)+1}, \ldots, t_K\}$, где $k(\varepsilon) = \min\{k, t_k \in T,\ \mathrm{pr}_k + \ldots + \mathrm{pr}_K \leqslant \varepsilon\}$.

Поэтому включение $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \overline{\pi}) \in T \setminus T_\varepsilon$ означает, что *«коллективной» экспертизе π_* доверять не следует в силу «патологической» несогласованности частных экспертиз*. Заметим, что эксперты могут сами выбирать значения $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}$, $i = 1, \ldots, N$, нч. э. ξ, но для определения *коллективной экспертизы* необходимо, чтобы они в своих заключениях *упорядочили возможности всех значений ξ* из $\bigcup\limits_{i=1}^{N}\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}\}$.

3.4.2 Экспертное восстановление распределения неопределенного нечеткого элемента и оценки доверия восстановленному распределению

Заметим, что решение задачи (3.41) позволило выразить недоверие к коллективной экспертизе, хотя *эксперты не имели математических средств для выражения правдоподобий собственных заключений*. Учесть мнения каждого эксперта о правдоподобии его собственного решения позволит конструкция *неопределенного нч. э.*, см. § 2.1 и 3.3.

Но. нч. э. со значениями в X называется функция $\widetilde{\xi} = q(\eta, \widetilde{s})$ нч. э. η и но. э. $\widetilde{s}$, канонических для пространств $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta})$ с возможностью $\mathrm{P}^{\eta}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{L}$ и $(S, \mathcal{P}(S), \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ с правдоподобием $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}$, при отображении $q(\cdot,\cdot)\colon Y \times S \to X$. В $(S, \mathcal{P}(S), \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ S — множество элементарных высказываний, $\mathcal{P}(S)$ — множество всех подмножеств S, каждое подмножество $E \subset S$ взаимно однозначно представляет высказывание[1] e как множество элементарных высказываний, каждое из которых влечет e: $e \leftrightarrow E = \bigcup\limits_{\substack{s \in S,\\ s \to e}} \{s\} \equiv \{s \in S,\ s \to e\}$, где $\leftrightarrow$ символизирует взаимно однозначное соответствие, а $s \to e$ означает «s влечет e»; $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(S) \to L$ — правдоподобие, значение $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\widetilde{s} \in E) = \sup\limits_{s \in E} t^{\widetilde{s}}(s)$, — правдоподобие истинности но. в., согласно которому $\widetilde{s} \in E$, где $t^{\widetilde{s}}(s) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\widetilde{s} = s)$ — правдоподобие истинности но. в. согласно которому $\widetilde{s} = s$, $s \in S$, см. § 1.2.

В модели Об. И., определенной неопределенным нч. э. $\widetilde{\xi}$, пространство с возможностью $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta})$ моделирует *нечеткость формулировок*, характеризующих *свойства* Об. И., относящуюся к их содержанию, пространство с правдоподобием $(S, \mathcal{P}(S), \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ моделирует *но. в.* эксперта *о правдоподобии нечетких формулировок*, *истинность* которых, разумеется, не абсолютна в силу принципиальной неполноты и недостоверности знания свойств Об. И., см. § 3.3.

Для каждого $s \in S$ $\xi_s = q(\eta, s)$ — нч. э., $g^{\xi_s}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(\xi_s = x) = \sup\{g^{\eta}(y) \mid y \in Y,\ q(y,s) = x\}$, $x \in X$, — его распределение, понимаемое как значение *неопределенной функции* $g^{\xi_{\widetilde{s}}}(\cdot) = g^{\widetilde{s}}(\cdot)$ (т. е. функции $g^{\xi_{\widetilde{s}}}(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, зависящей от неопределенного элемента $\widetilde{s}$, как от параметра) при $\widetilde{s} = s$. Поэтому

$$t^{g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)}(g(\cdot)) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g(\cdot)) = \sup\{t^{\widetilde{s}}(s) \mid s \in S,\ \forall\, x \in X\ g^{\xi_s}(x) = g(x)\},\ g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}, \tag{3.43}$$

— *относительное правдоподобие истинности но. в., согласно которому неопределенное распределение* $g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$ *равно* $g(\cdot)$, а

$$t^{g^{\widetilde{\xi}(x)}}(\mathrm{p}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(x) = \mathrm{p}) = \sup\{t^{\widetilde{s}}(s) | s \in S,\ g^{\xi_s}(x) = \mathrm{p}\} = \tau_x^{\widetilde{\xi}}(\mathrm{p}), \tag{3.44}$$

— *относительное правдоподобие истинности но. в., согласно которому возможность равенства* $\widetilde{\xi} = x \in X$ *равна* $\mathrm{p} \in [0,1]$.

[1] $a, b, \ldots$ — высказывания, $A, B, \ldots$ — представляющие их подмножества S.

Функция $\tau^{\widetilde{\xi}}_{\cdot}(\cdot)\colon X \times \mathcal{L} \to L$ называется *распределением правдоподобий возможностей значений* неопределенного нч. э. $\widetilde{\xi}$, соответственно, $t^{g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)}(g(\cdot))$, $g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, — *распределение правдоподобий распределений возможностей значений* неопределенного нч. э. $\widetilde{\xi}$, короче — *распределение* неопределенного нч. э. $\widetilde{\xi}$, которое обозначим $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to L$.

Покажем, что задача экспертного восстановления распределения неопределенного нч. э. $\widetilde{\xi}$ как задача восстановления функции $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to L$ или (и) функции $\tau^{\widetilde{\xi}}_{\cdot}(\cdot)\colon X \times \mathcal{L} \to L$ может быть решена подобно тому, как решены задачи (3.40), (3.41) восстановления распределения нч. э. ξ.

Рассмотрим случай, в котором каждый из N экспертов предлагает семейство, по его мнению, в той или иной степени правдоподобных вариантов (значений) неопределенного распределения возможностей $g^{\widetilde{\xi}}(x)$, $x \in X$, значений $\widetilde{\xi}$, а затем все N предложенных экспертами семейств объединяются в одно семейство $g^{\xi_{s_k}}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n$, и каждый эксперт по своему усмотрению упорядочивает его по убыванию правдоподобий распределений возможностей. Если по мнению i-го эксперта

$$1 = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_1}}}(\cdot)) > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_2}}}(\cdot)) > \ldots >$$
$$> \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_n}}}(\cdot)) > 0, \; i = 1, \ldots, N, \quad (3.45)$$

то он в качестве своей экспертизы сообщает перестановку $\pi_i^{-1}(k) = i_k$, $k = 1, \ldots, n$, упорядочивающую правдоподобия распределений семейства $g^{\xi_{s_k}}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n$, по убыванию, $i = 1, \ldots, N$.

Коллективное заключение о распределении $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)$ (3.43), которое может быть получено аналогично решению задачи (3.40), (3.41), определит перестановку π_*, упорядочивающую, подобно (3.45), правдоподобия распределений возможностей

$$1 = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(1)}}}(\cdot)) > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(2)}}}(\cdot)) > \ldots > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(n)}}}(\cdot)) > 0$$

согласно коллективной экспертизе, и оценит, в какой степени ей следует доверять. Задача экспертного восстановления распределения $\tau^{\widetilde{\xi}}_{\cdot}(\cdot)$ (3.44) решается аналогично.

Замечание 3.4.1. Авторам неизвестны публикации, в которых рассмотрены подобные методы экспертного восстановления моделей но. э. и неопределенных нч. э.

Заключение

В главе предложены и исследованы методы субъективного моделирования вероятностной случайности, свойственной данным наблюдений за эволюционирующим Ст. О. Показано, что *субъективной моделью дискретного вероятностного пространства* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pr})$ *служит заданное м.-и. пространство* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, *в котором* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ *и* $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ *максимально согласованы с* Pr, причём *вероятности* Pr, *с каждой из которых максимально* *согласованы* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ *и* $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, *образуют класс субъективно эквивалентных вероятностей*, а пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ *служит субъективной моделью эволюционирующего Ст. О., в вероятностной модели которого вероятность может произвольно эволюционировать в пределах класса субъективно эквивалентных вероятностей.*

Показано, что субъективная модель такого эволюционирующего Ст. О. при достаточно естественных условиях может быть *безошибочно восстановлена на основе конечного числа данных событийно-частотных наблюдений*, в то время как *произвольно эволюционирующая* в пределах класса субъективно эквивалентных вероятность в его вероятностной модели при любом числе данных наблюдений может быть восстановлена лишь с точностью до включения в класс субъективно эквивалентных вероятностей.

Рассмотрена *субъективная модель* $(\mathcal{R}^n, \mathcal{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{Pl}, \mathrm{Bel})$ *абсолютно непрерывного вероятностного пространства* $(\mathcal{R}^n, \mathcal{L}^{(n)}, \mathrm{Pr})$, в которой *распределения* Pl и Bel *субъективно согласованы с плотностью вероятности* Pr (распределения Pl и Bel *измеримы относительно максимальной сигма-подалгебры сигма-алгебры* $\mathcal{L}^{(n)}$, *относительно которой измерима плотность вероятности* Pr). Показано, что и в этом случае субъективная модель, единственная с точностью до эквивалентности, оказывается таковой для каждой вероятностной модели из класса субъективно эквиватентных, что позволяет *субъективно моделировать эволюционирующий Ст. О., в вероятностной модели которого вероятность произвольно эволюционирует в пределах класса субъективно эквивалентных.*

Рассмотрена субъективная модель вероятностной случайности в третьем варианте мер правдоподобия и доверия, которые наследуют некоторые черты вероятности и психофизики, в частности, — ЗБЧ, наличие которого существенно для эффективности энтропий шенноновского типа распределений правдоподобий и доверий. В частности, рассмотрены меры правдоподобия Pl' и доверия Bel', максимально согласованные с дискретной вероятностью, и исследованы классы взаимно Γ'-эквивалентных правдоподобий. Полученные результаты использованы в исследованиях информативности и неопределённости субъективных суждений м.-и.

Исследована проблема информативности и неопределённости субъективных суждений как информативности и неопределённости энтропий субъективных распределений значений неопределённого элемента $\widetilde{x}$, моделирующего суждения м.-и. Определена и исследована пара энтропий, формально аналогичных шенноновской, названных информативностью но. в. и неопределённостью но. в. Показано, что энтропии обладают свойствами, формально подобными свойствам шенноновской энтропии, но в силу отсутствия ЗБЧ их содержательная интерпретация существенно отличается от интерпретации шенноновской информации, оценивающей число «типичных последовательностей» событий как носителей информации.

Определены и исследованы энтропии субъективных распределений но. э. $\widetilde{x}$ в третьем варианте мер правдоподобия и доверия и их аналоги, основанные на ЗБЧ, индуцированном вероятностным ЗБЧ для вероятности, субъективной моделью которой служит пространство с мерами правдоподобия и доверия. *Показано, что в этом случае свойства энтропий аналогичны свойствам шенноновской энтропии, а для энтропии, определённой индуцированным ЗБЧ как математическое ожидание меры субъективной информативности/неопределённости получено равенство, связывающее математическое ожидание меры субъективной неопределённости/информативности с шенноновской энтропией.*

Рассмотрена оптимизация субъективного решения в задаче идентификации состояния неопределённого нечёткого объекта, моделью которого служит нечёткое пространство, зависящее от значения неизвестного параметра, определяющего его состояние.

Рассмотрены методы экспертного восстановления моделей нечёткого и неопределённого нечёткого элементов.

Авторы выражают благодарность Нагорному Ю. М. за обсуждение учебного пособия и за помощь при подготовке электронного варианта рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-07-00133а, 11-07-00722, 14-07-00441).

Основная литература

1. *Пытьев Ю. П.* Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях. 1. Математические и эмпирические основы // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. — 2018. — № 1. — С. 3—17.
2. *Pyt'ev Y. P.* Mathematical Methods of Subjective Modeling in Scientific Research: 1. The Mathematical and Empirical Basis // Moscow University Physics Bulletin. — 2018. — Vol. 73, no. 1. — P. 1–16. — DOI: 10.3103/S0027134918010125.
3. *Пытьев Ю. П.* Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях. 2. Приложения // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. — 2018. — № 2. — С. 3—17.
4. *Pyt'ev Y. P.* Mathematical Methods of Subjective Modeling in Scientific Research. 2: Applications // Moscow University Physics Bulletin. — 2018. — Vol. 73, no. 2. — P. 125–140. — DOI: 10.3103/S0027134918020145.
5. *Пытьев Ю. П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 286 с.
6. *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента. — М. : Высшая школа, 1989. — 352 с.
7. *Пытьев Ю. П.* Математическое моделирование феноменов случайности и неопределённости в научных исследованиях. 1. Математические и эмпирические основы // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. — 2017. — № 1. — С. 3—16.
8. *Пытьев Ю. П.* Математическое моделирование феноменов случайности и нечёткости в научных исследованиях. 2. Приложения // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. — 2017. — № 2. — С. 1. — DOI: 10.3103/S0027134917010131.
9. *Пытьев Ю. П.* Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Матем. моделирование. — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 102—125.
10. *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. — 2-е изд. — М. : Физматлит, 2016. — 596 с.

11. *Пытьев Ю. П.* Возможность. Элементы теории и применения. — М. : Эдиториал УРСС, 2000.

12. *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. — 1-е изд. — М. : Физматлит, 2007. — 464 с.

13. *Пытьев Ю. П.* Вероятность, возможность и субъективное моделирование в научных исследованиях. Математические, эмпирические основы, приложения. — М. : Физматлит, 2018. — 272 с.

14. *Балакин Д. А.*, *Нагорный Ю. М.*, *Пытьев Ю. П.* Эмпирическая верификация, восстановление и коррекция субъективной модели // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Сб. статей Международной конференции. — РУДН. М. : РУДН, 2015. — С. 190—195.

15. *Балакин Д. А.*, *Пытьев Ю. П.* Редукция измерения при наличии субъективной информации // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 12. — С. 84—110.

16. *Пытьев Ю. П.* Математические методы и алгоритмы эмпирического восстановления стохастических и нечетких моделей // Интеллектуальные системы. — 2007. — Т. 11, № 1—4. — С. 277—327.

17. *Пытьев Ю. П.*, *Шишмарев И. А.* Теория вероятностей, математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков. — 2-е изд. — М. : Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2010. — 406 с.

18. *Пытьев Ю. П.*, *Животников Г. С.* Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ // Интеллектуальные системы. — 2001. — Т. 6, № 1—4. — С. 63—90.

19. *Пытьев Ю. П.* Методы математического моделирования измерительно–вычислительных систем. — 3-е изд. — М. : Физматлит, 2012.

Дополнительная литература

20. *Тэрано Т.* Введение в нечеткие системы / пер. с яп. Ю. Н. Чернышева // Прикладные нечеткие системы / К. Асаи [и др.] ; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. — М. : Мир, 1993. — Гл. 1. С. 9—17. — ISBN 5-03-002326-7.

21. *Танака К.* Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве : пер. с англ. // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / под ред. Р. Р. Ягера. — М. : «Радио и связь», 1986. — С. 37—50.

22. *Линник Ю. В.* Статистические задачи с мешающими параметрами. — М. : Наука, 1966. — 252 с.

23. Probabilistic Networks and Expert Systems / R. G. Cowell [et al.]. — Springer-Verlag, 1999.

24. *Тулупьев А. Л.*, *Николенко С. И.*, *Сироткин А. В.* Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. — СПб. : Наука, 2006. — 608 с.

25. *Stein M.*, *Beer M.*, *Kreinovich V.* Bayesian approach for inconsistent information // Information Sciences. — 2013. — Vol. 245. — P. 96–111. — DOI: 10.1016/j.ins.2013.02.024.

26. *Goldstein M.* Subjective Bayesian Analysis: Principles and Practice // Bayesian Analysis. — 2006. — Vol. 1. — P. 403–420. — DOI: 10.1214/06-ba116.

27. *Williamson D.*, *Goldstein M.* Posterior Belief Assessment: Extracting Meaningful Subjective Judgements from Bayesian Analyses with Complex Statistical Models // Bayesian Analysis. — 2015. — Vol. 10, no. 4. — P. 877–908. — DOI: 10.1214/15-ba966si.

28. Subjective Bayesian beliefs / C. Antoniou [et al.] // Journal of Risk and Uncertainty. — 2015. — Vol. 50, no. 1. — P. 35–54. — DOI: 10.1007/s11166-015-9208-5.

29. *Jaynes E.* Prior Probabilities // IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern. — 1968. — Vol. 4, no. 3. — P. 227–241. — DOI: 10.1109/tssc.1968.300117.

30. *Jeffreys H.* An Invariant Form for the Prior Probability in Estimation Problems // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1946. — Vol. 186, no. 1007. — P. 453–461. — DOI: `10.1098/rspa.1946.0056`.

31. *Berger J. M.*, *Bernardo J. M.* On the development of reference priors // Bayesian statistics. Vol. 4 / ed. by J. M. Bernardo [et al.]. — New York : Oxford Univ. Press, 1992. — P. 35–60.

32. On Divergence Measures Leading to Jeffreys and Other Reference Priors / R. Liu [et al.] // Bayesian Analysis. — 2014. — Vol. 9, no. 2. — P. 331–370. — DOI: `10.1214/14-ba862`.

33. *Jøsang A.*, *Hankin R.* Interpretation and Fusion of Hyper Opinions in Subjective Logic // 15th International Conference on Information Fusion (FUSION 2012). — Singapore, 2012.

34. *Jøsang A.* Subjective Logic: A Formalism for Reasoning Under Uncertainty. — 1st ed. — Heidelberg : Springer International Publishing, 2016. — DOI: `10.1007/978-3-319-42337-1`.

35. *Миронов А. М.* Нечеткие модальные логики // Интеллектуальные системы. — 2007. — Т. 11. — С. 201—230.

36. *Bhavsar V. C.*, *Mironov A. M.* Fuzzy modal logics // Proceedings of Workshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications, MVLPA 2006, Seattle, WA. — 2006. — P. 73–88.

37. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. — Princeton University Press, 1976.

38. *Jøsang A.* Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic // 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11). — Perugia, 2011.

39. *Jøsang A.* A Logic for Uncertain Probabilities // Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge Based Syst. — 2001. — Vol. 9, no. 3. — P. 279–311. — DOI: `10.1142/s0218488501000831`.

40. *Klir G. J.* Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. — Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 2006. — 518 p. — ISBN 0-471-74867-6.

41. *Halpern J. Y.* Reasoning about uncertainty. — Cambridge, Massachusetts : MIT press, 2003.

42. *Stevens S. S.* Psychophysics. — N. Y. : J. Wiley & Sons, 1975.

43. *Литвак Б. Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. — М. : «Радио и связь», 1982.

44. *Zadeh L.* A simple view of the Dempster-Shafer Theory of Evidence and its implication for the rule of combination // The AI Magazine. — 1986. — Vol. 7, no. 2. — P. 85–90.

45. *Yager R. R.* On the Dempster-Shafer framework and new combination rules // Information Sciences. — New York, NY, USA, 1987. — Vol. 41, no. 2. — P. 93–137. — ISSN 0020-0255. — DOI: 10.1016/0020-0255(87)90007-7.

46. *Inagaki T.* Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via Dempster-Shafer theory // IEEE Trans. Rel. — 1991. — Vol. 40, no. 2. — P. 182–188. — ISSN 0018-9529. — DOI: 10.1109/24.87125.

47. *Dubois D.*, *Prade H.* On the Combination of Evidence in Various Mathematical Frameworks // Reliability Data Collection and Analysis. Vol. 3 / ed. by J. Flamm, T. Luisi. — Dordrecht : Springer Nature, 1992. — P. 213–241. — (Eurocourses). — ISBN 978-94-010-5075-3. — DOI: 10.1007/978-94-011-2438-6_13.

48. *Bronevich A.*, *Rozenberg I.* The choice of generalized Dempster–Shafer rules for aggregating belief functions // Int. J. Approximate Reasoning. — 2015. — Vol. 56. — P. 122–136. — DOI: 10.1016/j.ijar.2014.10.002.

49. *Cattaneo M. E. G. V.* Belief functions combination without the assumption of Independence of the information sources // Int. J. Approximate Reasoning. — 2011. — Vol. 52, no. 3. — P. 299–315. — DOI: 10.1016/j.ijar.2010.10.006.

50. *Kłopotek M. A.*, *Wierzchoń S. T.* Empirical Models for the Dempster-Shafer-Theory // Belief Functions in Business Decisions. Vol. 88 / ed. by R. Srivastava, T. Mock. — Heidelberg : Springer Nature, 2002. — P. 62–112. — ISBN 978-3-7908-2503-9. — DOI: 10.1007/978-3-7908-1798-0_3.

51. *Wang P.* A Defect in Dempster-Shafer Theory // Uncertainty Proceedings 1994. — Elsevier BV, 1994. — P. 560–566. — DOI: 10.1016/b978-1-55860-332-5.50076-6.

52. *Savage L. J.* The foundations of statistics. — 2nd ed. — New York : Dover Publications Inc., 1972.

53. *Kyburg H. E.*, *Smokler H. E.* Studies in Subjective Probability. — 2-е изд. — Malabar, Florida : Krieger, 1980.

54. *McMillan B.* The Basic Theorems of Information Theory // Ann. Math. Stat. — 1953. — Vol. 24. — P. 196–219.

55. *Yager R. R.* On the specificity of possibility distribution // Fuzzy Sets and Systems. — 1992. — Vol. 50, no. 3. — P. 279–292.

56. *Yager R. R.* Entailment Principle for Measure-Based Uncertainty // IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2012. — Vol. 20, no. 3. — P. 526–535. — DOI: 10.1109/tfuzz.2011.2178029.

Подписано в печать 12.04.2022. Объем 4,25 п. л. Тираж 30 экз. Заказ №   .
Физический факультет им. М. В. Ломоносова,
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
Отпечатано в отделе оперативной печати физического факультета МГУ.