РАЗРАБОТКА И ОБОСНОВАНИЕ НОВОГО ПОДХОДА К МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ: ПРОБЛЕМА ПРЕДМЕТНОЙ МНОЖЕСТВЕННОСТИ МОДЕЛЕЙ И АНАЛИЗ АДЕКВАТНОСТИ ИХ ЦЕЛЯМ ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность направления. Современная эпоха характеризуется феноменом глобализации. Важнейшим аспектом процесса глобализации является развитие информационной индустрии. Можно говорить об информационных технологиях получения новых знаний, их накопления и использования. К информационным технологиям относят методологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Методы математического моделирования и вычислительного эксперимента как информационные технологии производства новых знаний получили в последнее время значительное развитие. Если следовать известной триаде А.А. Самарского “модель → алгоритм → программа”[1], то метод математического моделирования предполагает: изучение математических уравнений, описывающих объект исследования, постановку и проведение вычислительного эксперимента и программирование. Данные вычислительного эксперимента сравниваются с данными натурного эксперимента в том или ином смысле, при этом результаты моделирования прогнозируют результаты натурного эксперимента. Это можно отнести к прямому моделированию как к информационной технологии получения прогнозируемых, т.е. ожидаемых в результате измерений результатов. Однако можно говорить не только о прямом моделировании, в основе которого лежит идея прогноза в самом широком смысле слова, но и об обратном моделировании, как об исследовании объекта.

Обратное моделирование — это исследовательский проект, в котором по результатам эксперимента, а не моделирования необходимо высказаться по поводу некоторого набора свойств объекта. В обратном моделировании исследователь ставит задачу наилучшего оценивания свойств объекта. Это исследовательская часть рассматриваемой информационной технологии получения новых знаний, а не практическая, сводимая к прогнозированию. В обратном моделировании результаты должны быть редуцированы к таким значениям характеристик объекта, которые свойственны невозмущенному экспериментом объекту исследования. Это условие положено в основу метода редукции, развиваемого в работах Ю.П. Пытьева[2]. При обратном моделировании по данным измерительного эксперимента требуется высказаться о том, что непосредственно измерить нельзя, т.е. о том, что не наблюдаемо и это также относится к информационным технологиям получения новых знаний.

Зачастую как прямое, так и обратное моделирование трудно отделить одно от другого. Традиционно прямому моделированию отводилась главенствующая роль, т.к. прогноз выступал и выступает в качестве важнейшего, если не решающего аргумента в вопросах выбора модели среди ряда конкурирующих моделей, претендующих на описание того или иного объекта исследования.

Обратное моделирование, которое нацелено на изучение внутренних характеристик объекта, имеет непосредственное отношение к проблеме множественности, мультимодельности математических моделей, используемых для описания объекта. И для прямого, и для обратного математического моделирования на этапе верификации модели готовится один или несколько тестовых вычислительных и измерительных экспериментов. Полученные ре-

---

[1] *Самарский А.А.* Проблемы использования вычислительной техники и развитие информатики// Вестн. АН СССР. 1985. №3. С.57 — 69.

[2] *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 428с.

зультаты сравниваются в рамках выбранной или приемлемой точности, что дает возможность оценить или скорректировать структуру и параметры модели. Когда этап верификации модели завершен, определяются условия для проведения нового эксперимента и по результатам моделирования прогнозируется, какой должен быть результат[3].

В части сравнения результатов вычислительного и измерительного экспериментов исследователь формулирует критерий “приемлемого качества” прогнозирования и оценивания, например, в терминах “удовлетворительно — неудовлетворительно”. В этом случае модель в результате проведенных тестов вычисления и измерения: прогнозирует измеренное значение “удовлетворительно — неудовлетворительно”, оценивает модель “удовлетворительно — неудовлетворительно”. При прямом вычислительном эксперименте прогнозируется измеренное значение. При обратном вычислительном эксперименте оцениваются характеристики исследуемого объекта. В той мере, в какой согласуются результаты (выводы, следствия, прогнозы, оценки) модели и измерительного эксперимента, считается, что исходная математическая модель адекватна поставленной цели исследования. Именно в связке “модель адекватна цели исследования” кроется потенциал множественной генерации моделей объекта исследования.

В этой связи сформулируем одну из важнейших в настоящее время проблем метода, концепции моделирования — проблему мультимодельности, множественности моделей, используемых для описания объекта исследования[4]. Эта проблема проявляется в том, что модели продолжают создаваться. Прямое и обратное моделирование в том виде, как оно сформулировано, слишком слабое ограничение, чтобы остановить производство все новых и новых моделей или, наоборот, объяснить, почему они не появляются более в тех или иных областях. Это означает, что ни прямое, ни обратное моделирование непосредственно не касаются вопросов производства новых моделей.

В работах автора[5] возможности рассматриваемого подхода иллюстрируются на ряде примеров математического моделирования: элементов морфогенеза, электромагнитного коллектора, конечного кристалла, турбулентности и ряда других. Кроме того, разработана также серия математических моделей, относимых к общественным наука: нормативная модель глобальной истории, политика с позиций силы, псифизика. Все математические модели объединены с точки зрения нового подхода к методу математического моделирования, т.е. описывается специфическая для данной предметной области множественность моделей, формулируется перечень общих и частных целей моделирования, адекватность которым обеспечивает развиваемая модель. Предложенные модели исследованы так же, как математические объекты, в каждой из моделей использованы численные методы, для каждой из них разработаны соответствующие алгоритмы и комплексы программ.

Целью научного направления явилась разработка нового подхода к методу математического моделирования в части проблемы мультимодельности, которая истолковывается с точки зрения адекватности моделей целям исследования. Заявленная цель достигалась в виде следующих этапов:

- обосновать новый подход к методу математического моделирования в связи с проблемой мультимодельности, рассматривая эту множественность с точки зрения разнообразия общих и частных целей исследования;
- продемонстрировать применение нового подхода к методу математического моделирования на ряде актуальных примеров.

---

[3] *Пытьев Ю.П.* Возможность как альтернатива вероятности. — 2-ое изд. перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. 596 с.

[4] *Плохотников К.Э.* Разработка и обоснование нового подхода к методу математического моделирования: проблема предметной множественности моделей и анализ адекватности их целям исследования. — Диссертация на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук. — М., 2013. 165с.

[5] *Плохотников К.Э.* Метод и искусство математического моделирования: курс лекций. — М.: Флинта, 2012. 518с. — ISBN 978-5-9765-1541-3; *Плохотников К.Э.* Эсхатологическая стратегическая инициатива: исторический, политический, психологический и математический комментарии. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 251с. ISBN 978-5-9912-7006-9.

В рамках развиваемого подхода к методу математического моделирования одним из важнейших требований выступает адекватность построенной модели цели исследования, а точнее определенному перечню целей. К этому перечню целей могут быть отнесены такие традиционные цели, как прогнозирование и оценивание при прямом и обратном моделировании, а также цель построения комплекса моделей. Комплекс моделей, если его удается сформулировать для некоторой предметной области, позволяет решить проблему мультимодельности.

Все модели, разработанные автором ранее, относятся к различным предметным областям. Проблема мультимодельности особенно остро проявила себя при математическом моделировании элементов морфогенеза (формообразования) (лекция №3[6]), турбулентности (лекция №6), при моделировании истории (лекция №10).

Моделирование пространственно-временной динамики элементов растущей формы, например, растения или животного вызывала и вызывает особый интерес в математической биологии. Для данной области характерен огромный модельный полиморфизм, который так и не удалось охватить с помощью подходящего комплекса моделей. При построении конкретной модели выбор был сделан в пользу подхода типа “растущий континуум”, который, как представляется, наиболее адекватен описанию процессов формообразования в биологии.

Иная ситуация сложилась при математическом моделировании турбулентного движения жидкости. В данной области, несмотря на огромный уже имеющейся модельный арсенал, удалось сформулировать нечто общее, характерное для большинства моделей. Имеющиеся модели турбулентности были проанализированы с точки зрения представления сплошной турбулизованной среды в виде ансамбля дискретных жидких объектов. Уточнение конструкционных особенностей дискретного объекта турбулентности явилось тем общим, что связывает самые разнообразные модели турбулентности, т.е. данное конструкционное уточнение выступает в качестве комплекса моделей турбулентности. В этой связи сделан выбор в пользу построения многомасштабной математической модель турбулентного движения сплошной среды, которая, представляется, наиболее адекватной процессам описания турбулентной жидкости.

В каждой из моделей осуществлен вывод конструктивных систем уравнений, т.е. таких систем, которые допускают проведение подходящего вычислительного эксперимента. Подтверждение конструктивности построенных систем уравнений потребовало разработать подходящие численные методы и комплексы программ. Все эти мероприятия позволили, в конечном счете, осуществить, как прямое, так и в некоторых случаях обратное моделирование.

Методы исследования. Декларируется общая для всех предложенных моделей цель[4]: уравнения математической модели должны допускать преобразование в конструктивную форму, допускающую вычислительный эксперимент. Например, в модели морфогенеза уравнения становятся вполне конструктивными после перехода к одномерному случаю. В модели электромагнитного коллектора (лекция №5) уравнения допускают вычислительный эксперимент после специального включения диода в электрическую цепь. В модели термогеометрической динамики конечного кристаллического образца (лекция №4) пройден длинный путь теоретических выкладок прежде, чем удалось преобразовать уравнения к форме, допускающей численное описание обратимых и необратимых фазовых переходов. Наконец, в многомасштабной модели турбулентности от статистического описания ансамбля дискретных жидких объектов к уравнениям в частных производных гидродинамического типа и далее уже к конструктивным уравнениям, описывающим движение турбулентной жидкости в трубе.

---

[6] Здесь и далее ссылка на курс лекций: *Плохотников К.Э.* Метод и искусство математического моделирования: курс лекций. — М.: Флинта, 2012. 518с. — ISBN 978-5-9765-1541-3.

Согласно развиваемым представлениям о методе математического моделирования, результаты вычислительного эксперимента рассматриваются в качестве прогноза при прямом математическом моделировании, сравниваясь в том или ином смысле с данными натурного эксперимента. При обратном математическом моделировании производится оценивание характеристик объекта по известным экспериментальным данным. Прямое и отчасти обратное моделирование наиболее отчетливо проявились на примере построения моделей термогеометрической динамики кристалла и турбулентности, где, в частности, удалось добиться неплохого согласия с экспериментальными данными. На этапе как прямого, так и обратного математического моделирования разработаны различного рода численные методы, алгоритмы и программы.

Выведены и численно изучены системы уравнений в частных производных для описания элементов морфогенеза (лекция №3). Для численных расчетов использовались полностью неявные конечноразностные схемы в совокупности с методом простой итерации. Была обеспечена аппроксимация исходных нелинейных уравнений в частных производных и устойчивость соответствующих разностных схем. Наличие свойства регенерации в одномерной задаче было обосновано полуаналитическим способом (методом усреднения) и путем прямых численных расчетов.

На базе законов Кирхгофа выведена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для описания динамики токов в коллекторе (лекция №5). Специальное включение диода в электротехническую схему коллектора позволило осуществить численное решение искомой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В модели термогеометрической динамики конечного кристаллического образца (лекция №4) вычислительная задача свелась к поиску локального минимума функции потенциальной энергии с некоторыми добавками в зависимости от параметра температуры. Был разработан специальный алгоритм поиска локальных минимумов, основанный на полностью неявных схемах расчетов с итерациями, автоматической регулировкой шага интегрирования на каждом временном слое, последующей проверкой малости нормы градиента и положительности всех собственных значений якобиана правой части системы дифференциальных уравнений.

В модели турбулентного движения (лекция №6) жидкость представлялась в виде ансамбля разномасштабных дискретных жидких объектов. Для описания ансамбля выведено кинетическое уравнение, подобное уравнению Больцмана. Кинетическое уравнение решено с помощью методов Чепмена-Энского и Грэда. Получена замкнутая система уравнений в частных производных для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. В части решения системы уравнений, описывающей движение турбулентной жидкости в трубе, уравнение масштабов турбулентности оказалось некорректным. Математической формой некорректности оказался член антидиффузионного типа. Некорректность была преодолена путем разделения переменных в функции масштабов с последующим интегрированием по пространству. Для численного поиска стационарных решений полученной интегро-дифференциальной системы уравнений в частных производных был разработан вычислительный алгоритм, основанный на использовании полностью неявных схем расчета с итерациями и автоматической регулировкой шага интегрирования на каждом временном слое.

Научная новизна. При разработке и обосновании нового подхода к методу математического моделирования становится актуальной априорная формулировка следующего перечня общих целей моделирования[4]. При построении модели должны быть обеспечены такие позиции, как конструктивность модели, прогнозирование в рамках прямого и оценивание в рамках обратного моделирования. Кроме того, необходимо иметь в виду проблему предметной мультимодельности, которая может быть решена в рамках разработки некоторого комплекса моделей или иначе некоторой метамодели. Комплекс моделей позволил бы взглянуть на имеющуюся предметную множественность моделей с единой позиции. Любая вновь производимая модель, или набор уже имеющихся моделей должны быть переосмыслены с точки зрения комплекса моделей, если таковой имеется. Если же комплекс моделей

отсутствует, что, как правило, и имеет место, то его необходимо в том или ином смысле построить, сформулировать. Именно под этим углом зрения должны строиться отдельные математические модели в конкретных предметных областях.

Во всех лекциях курса “Метод и искусство математического моделирования” построены математические модели из разных предметных областей. Все модели выступают в качестве иллюстрации развиваемого подхода к методу математического моделирования. Это выражается в том, что каждая из моделей должна быть адекватна перечисленному выше перечню общих целей, а также ряду специфических целей, характерных для конкретной предметной области.

Практическая ценность развиваемого подхода к методу математического моделирования выражается в его универсальности, применимости к самым разнообразным предметным областям. Примеры использования предложенного подхода к методу математического моделирования апробированы на ряде предметных областей из математической биологии, энергетики, кристаллографии, турбулентности, моделировании истории. Приведу более развернутые характеристики практической ценности ряда построенных моделей.

Результаты построения математической модели морфогенеза представляют интерес для биологии развития в части задачи пространственно-временного описания индивидуального развития или онтогенеза. Для описания элемента формы выведены уравнения в частных производных с подвижной границей. Практическую ценность представляют собой разностные схемы и комплекс программ по решению одномерных уравнений в частных производных. Результаты решения одномерных уравнений модели доказали наличие свойства регенерации отдельного элемента формы.

Результаты математического моделирования электромагнитного коллектора имеют непосредственную практическую ценность для энергетики, поскольку направлены на разработку устройства, которое, согласно замыслу, позволит преобразовать энергию, которую можно отнести к категории шума или электромагнитного “смога”, в электрическую энергию. Предложенная математическая модель коллектора, а также программный комплекс позволили сформулировать и подсчитать КПД устройства. Возможность априорного подсчета КПД устройства позволяет оптимизировать конструкцию коллектора в части подбора наиболее подходящей топологии ансамбля ректенн в коллекторе.

Результаты математического моделирования термогеометрической динамики конечного кристаллического образца имеют практическую ценность в задачах химического катализа при изучении термической реконструкции поверхности металлов, термических конформационных и фазовых переходов. Практическую ценность представляет также комплекс программ, позволивший получить результаты моделирования реконструкции поверхности платины и вольфрама, при этом сравнение вычислительного и натурного экспериментов оказалось удовлетворительным.

Результаты построения многомасштабной математической модели турбулентного движения жидкости представляют практическую ценность в двух аспектах. Во-первых, удалось осмыслить множественность уже имеющихся моделей турбулентности с помощью комплекса моделей, который связывается с многообразием интерпретаций дискретного жидкого объекта турбулентной жидкости. Во-вторых, выведены уравнения в частных производных для описания как турбулентных, так и ламинарных течений. Практическую ценность представляет собой комплекс программ для численного решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости в трубе. Сравнение результатов вычислительного и натурного экспериментов по движению жидкости в трубе оказалось удовлетворительным.

Более подробно рассмотрим три предметные области, которые составили интерес автора за последние пять лет (2013 — 2018 гг.).

Модель №1. Рассмотрим математическую модель, которая получила название “Об одной дискретной математической модели идеальной жидкости”[7]. Ранее в ряде работ автора представлена математическая модель турбулентного движения жидкости. В модели сплошная среда (жидкость, газ и пр.) представляется в виде ансамбля дискретных (жидких) объектов. В общем случае от того, какой смысл вкладывается в понятие “дискретный объект”, можно построить вообще говоря множество математических моделей турбулентности. Смысловая емкость понятия дискретного объекта выражается, в частности, в большом количестве используемых синонимов, таких, как жидкая частица, моль, вихрь, глобула континуума и т.п.

В построенной ранее модели из уравнений невязкой несжимаемой жидкости был выведен потенциал, используемый в качестве потенциала взаимодействия отдельных помеченных точек сплошной среды. Исследование данного потенциала в рамках задачи двух тел показало наличие математической особенности типа ветвления. Данная особенность рассматривалась в качестве одной из важнейших характеристик феномена турбулентности.

Представляемая математическая модель движения идеальной жидкости строится с того момента, когда отдельные помеченные точки жидкости нагружаются массой и превращаются в дискретные жидкие частицы. После уточнения механизм взаимодействия пары жидких частиц модель принимает законченные черты и, в частности, позволяет провести набор вычислительных экспериментов по моделированию различного рода течений. На всех этапах построения модели эффекты, связанные с вязкостью и теплопроводностью, не учитываются. Именно по этой причине данная модель позиционируется, как дискретная модель идеальной жидкости.

В целом, построенная модель, позволила разделить детерминированную и стохастическую компоненты в описании турбулентных течений идеальной жидкости. Данное разделение обеспечило на аналитическом уровне доступ к механизму генерации стохастики и, как следствие, к возможности построения характерных представителей различного рода классов течений.

Кратко напомним процедуру введения дискретной жидкой частицы в модели турбулентности, разработанной автором ранее (лекция №6). Запишем уравнения невязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \qquad (1)$$

где $i, j = 1,2,3$; t — время, $\boldsymbol{r} = (x_1,x_2,x_3)$ — радиус-вектор, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r})$, $P = P(t,\boldsymbol{r})$ — поля скорости и давление, $\rho = \text{const} > 0$ — плотность жидкости (по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

Применим ко второму уравнению в (1) операцию $\partial / \partial x_i$ и учтем условие неразрывности, тогда

$$\Delta P = -\rho \frac{\partial^2 (v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j}, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}. \qquad (2)$$

[7] *Плохотников К.Э.* Об одной дискретной математической модели идеальной жидкости// Национальная ассоциация ученых (НАУ), 2015, #3(8), с.42 – 47; *Плохотников К.Э.* Дискретная стохастико-детерминированная математическая модель идеальной жидкости// Сложные системы, 2015, №3(16), с.4 — 29; *Plokhotnikov K.E.* About One Discrete Mathematical Model of Perfect Fluid// Open Journal of Modelling and Simulation, 2016, Vol. 4, No.3, p.129-167; http://dx.doi.org/10.4236/ojmsi.2016.43012; *Плохотников К.Э.* Об одной дискретной математической модели идеальной жидкости// Математическое моделирование, 2016, т.28, №9, с.43-63; http://www.mathnet.ru/php/getFirstPage.phtml?jrnid=mm&paperid=3766&option_lang=eng

Формально, используя функцию Грина, обратим в (2) оператор Лапласа. Проводя дважды интегрирование по частям при условии отсутствия движения на бесконечности и дифференцируя полученное выражение по x_i после некоторых преобразований и подстановки в (1), найдем

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi} \int d\boldsymbol{r}' (v_j' - v_j)(v_k' - v_k) \frac{\partial^3 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = 0,$$

где $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r}')$, $d\boldsymbol{r}'$ — элемент объема в $\boldsymbol{r}'$-пространстве.

При лагранжевом подходе в описании жидкости вводится вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{a})$, которая обозначает траекторию движения точки с номером $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$. Скорость точки $\boldsymbol{a}$ — $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{a}) = \partial\, \boldsymbol{r}/\partial\, t = \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{a}))$. Из условия неразрывности следует, что якобиан преобразования $m = \det||\partial\, x_i/\partial\, a_j||$ не зависит от времени. Выбирая $m = 1$ и используя определение $\boldsymbol{V}$, получаем

$$\frac{dV_i}{dt} + \frac{1}{4\pi} \int d\boldsymbol{a}' (V_j' - V_j)(V_k' - V_k) \frac{\partial^3 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = 0, \qquad (3)$$

где

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j},\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{a}');\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{a}').$$

Аппроксимируем интеграл в (3) суммой, разбивая для простоты область интегрирования на одинаковые малые объемы ω, тогда

$$\frac{dV_i^{(n)}}{dt} + \gamma \sum_{m,m\neq n} (V_j^{(m)} - V_j^{(n)})(V_k^{(m)} - V_k^{(n)}) \frac{\partial^3 \left|\boldsymbol{r}^{(n)} - \boldsymbol{r}^{(m)}\right|^{-1}}{\partial x_i^{(n)} \partial x_j^{(n)} \partial x_k^{(n)}} = 0, \qquad (4)$$

где $\gamma = \omega/4\pi$; n, m — номера малых объемов ω.

Таким образом, используя гипотезу о дискретной структуре турбулентной жидкости, сводим исследование интегро-дифференциального уравнения (3) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4). На этом этапе под дискретным объектом понимается некоторая помеченная точка. Перепишем систему уравнений (4), вводя бинарный потенциал взаимодействия $\phi_{n,m}$ пары точек с номерами n и m:

$$\dot{\boldsymbol{r}}^{(n)} = \boldsymbol{V}^{(n)},\ \dot{\boldsymbol{V}}^{(n)} = -\sum_{m,m\neq n} \frac{\partial \phi_{n,m}}{\partial \boldsymbol{r}^{(n)}},\ \phi_{n,m} = \gamma (V_j^{(m)} - V_j^{(n)})(V_k^{(m)} - V_k^{(n)}) \frac{\partial^2 |\boldsymbol{r}^{(n)} - \boldsymbol{r}^{(m)}|^{-1}}{\partial x_j^{(n)} \partial x_k^{(n)}}. \qquad (5)$$

Уравнения (5) “приготовлены” в форме некоторой динамической системы, поведение которой описывается набором радиус-векторов $\boldsymbol{r}^{(n)}$ и скоростей $\boldsymbol{V}^{(n)}$. Исследование потенциала $\phi_{n,m}$ в рамках задачи движения пары точек показало наличие у него особенности типа точки ветвления. Проявление данной особенности связывалось с появлением сложных турбулентных режимов в течении жидкости. Дальнейшее построение модели предполагало нагружение точек массой и превращение их в полноценные дискретные жидкие частицы.

Следуя аналогии между турбулентностью и обычным газом атомов, жидкость представим в виде разреженного газа жидких частиц, которые между соударениями движутся прямолинейно и равномерно. Будем полагать, что выбираются дискретные жидкие частицы круговой для двумерного случая и шарообразной формы — в трехмерном пространстве.

Пусть пара жидких частиц сближается на расстояние, равное или меньшее сумме их радиусов, тогда предполагаем, что происходит слипание пары с образованием промежуточной частицы — квазипары. Квазипара — метастабильный объект и по истечении некоторого времени распадается на пару жидких частиц. Образование и распад квазипары постадийно интерпретирует процесс соударения пары жидких частиц, при этом должны иметь место законы сохранения массы, импульса, энергии и момента импульса.

Не ограничивая общности поместим ансамбль частиц в область квадратной формы со стороной L. Для простоты область квадратной формы будем именовать ящиком. Положим, что жидкие частицы упруго отражаются от стенок ящика. Остановимся на описании

взаимодействия пары жидких частиц в двухмерном случае. Обозначим текущие положения и скорости частиц до взаимодействия радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ соответственно. После взаимодействия положения и скорости частиц обозначим радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2'$ и $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'$.

Определим известные в механике две пары переменных $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{V}$ для описания взаимодействия двух частиц одинаковой массы:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{R} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{V} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2). \quad (6)$$

Вектор $\boldsymbol{R}$ определяет положение центра масс пары частиц, а $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости центра масс. Вектор $\boldsymbol{r}$ описывает относительный радиус-вектор положений пары частиц, а $\boldsymbol{v}$ — относительную скорость пары частиц.

С учетом (6) можно записать положения и скорости каждой из пары частиц через новые переменные:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}. \quad (7)$$

Пусть при взаимодействии пары жидких частиц выполняется закон сохранения импульса, тогда

$$m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 = m\boldsymbol{v}_1' + m\boldsymbol{v}_2'. \quad (8)$$

После подстановки второй пары уравнений (7) в левую и аналогично в правую части уравнения (8), получим

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}'. \quad (9)$$

Обеспечим выполнение закона сохранения энергии, тогда

$$\tfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2^2 = \tfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1'^2 + \tfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2'^2. \quad (10)$$

После подстановки второй пары уравнений (7) в левую и аналогично в правую части уравнения (10), получим

$$m\boldsymbol{V}^2 + m\boldsymbol{v}^2 = m\boldsymbol{V}'^2 + m\boldsymbol{v}'^2. \quad (11)$$

Учитывая (9), найдем

$$\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}'^2 \text{ или } v = v', \quad (12)$$

где $v = |\boldsymbol{v}|$, $v' = |\boldsymbol{v}'|$.

Наконец, запишем условие выполнения закона сохранения момента импульса, т.е.

$$m\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 = m\boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{v}_1' + m\boldsymbol{r}_2' \times \boldsymbol{v}_2'. \quad (13)$$

С учетом (7) уравнение (13) может быть переписано в виде:

$$2m\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} + \tfrac{1}{2}m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 2m\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{V}' + \tfrac{1}{2}m\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{v}'. \quad (14)$$

В связи с выполнением закона сохранения момента импульса положим, что взаимодействие не меняет положения центра масс пары жидких частиц, т.е.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'. \quad (15)$$

Учитывая (9), (15), найдем

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{v}'. \quad (16)$$

Пусть α и β угловые отклонения векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ от оси абсцисс. Аналогично под углами α' и β' будем понимать угловые расстояния от оси абсцисс векторов $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{v}'$. В этом случае, переходя в полярную систему координат, можно записать:

$\boldsymbol{r} = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $\boldsymbol{v} = (v\cos\beta, v\sin\beta)$;

$\boldsymbol{r}' = (r'\cos\alpha', r'\sin\alpha')$, $\boldsymbol{v}' = (v'\cos\beta', v'\sin\beta')$;

где $r = |\boldsymbol{r}|$, $v = |\boldsymbol{v}|$; $r' = |\boldsymbol{r}'|$, $v' = |\boldsymbol{v}'|$.

Подставляя полярное представление относительных радиус-векторов положений и скоростей в векторное произведение (16), найдем

$$K = xv_y - yv_x = rv\cdot\sin(\beta - \alpha) = r'v'\cdot\sin(\beta' - \alpha'). \quad (17)$$

Наряду с (15) сделаем еще одно предположение о механизме взаимодействия в связи с выполнением закона сохранения момента импульса, а именно

$$r = r'. \quad (18)$$

Предположения (15), (18) уточняют геометрию взаимодействия пары жидких частиц и могут быть рассмотрены в качестве постулатов.

Введем обозначения для углов между относительными радиус-векторами положений и скоростей: $\psi = \beta - \alpha$ и $\psi' = \beta' - \alpha'$. После учета (12) и (18) в последнем равенстве (17) найдем

$$\sin\psi' - \sin\psi = 2\sin\tfrac{\psi'-\psi}{2}\cos\tfrac{\psi'+\psi}{2} = 0. \qquad (19)$$

Уравнение (19) имеет два класса решений:

$$1)\ \psi' = \psi + 2\pi l;\ 2)\ \psi' = \pi - \psi + 2\pi l; \qquad (20)$$

где $l = 0, \pm1, \ldots$

Сформулируем критерий взаимодействия пары жидких частиц в виде одновременного выполнения следующих двух условий:

$$|\boldsymbol{r}| \le 2r_0,\ (\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) < 0, \qquad (21)$$

где r_0 — радиус жидкой частицы, $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ — скалярное произведение пары векторов. Согласно критерию (21), пара жидких частиц взаимодействует при выполнении двух условий: во-первых, расстояние между частицами стало меньше или равно двум радиусам частиц и, во-вторых, проекция относительной скорости на относительное расстояние отрицательна, т.е. центры частиц сближаются.

Критерий взаимодействия (21) можно переписать в виде:

$$|\boldsymbol{r}| \le 2r_0,\ \cos\psi < 0. \qquad (22)$$

С учетом (22) положим, что взаимодействие прекращается, когда выполняется условие:

$$\cos\psi' > 0. \qquad (23)$$

Легко сообразить, что условию (23) удовлетворяет второй класс решений (20). Действительно, поскольку $\cos\psi' = \cos(\pi - \psi + 2\pi l) = -\cos\psi > 0$, постольку $\cos\psi < 0$, что верно согласно (22).

Запишем $\cos\psi = \frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{rv}$, тогда, учитывая, что $\cos\psi < 0$, найдем вообще говоря пару решений, которые представим в виде:

$$\psi = \pi + \nu\psi_0 + 2\pi l, \qquad (24)$$

где, $|\nu| = 1$, $l = 0, \pm1, \ldots$, а $\psi_0 = \arccos\frac{|(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})|}{rv}$. Для определения ν подставим (24) во второе равенство в (17), тогда найдем

$$\psi = \pi - \mathrm{sign}(K)\psi_0, \qquad (25)$$

где $\mathrm{sign}(K)$ — знаковая функция величины K.

Подставляя (25) во второй класс решений (20), найдем

$$\psi' = \mathrm{sign}(K)\psi_0 + 2\pi l. \qquad (26)$$

Учитывая, что $\psi' = \beta' - \alpha'$, перепишем решение (26) в виде

$$\beta' - \alpha' = \mathrm{sign}(K)\psi_0 + 2\pi l. \qquad (27)$$

Уравнения (26), (27) являются ключевыми в вопросе изучения взаимодействия пары частиц. Согласно уравнению (27) угловые отклонения от оси абсцисс α', β' радиус-векторов относительных положений $\boldsymbol{r}'$ и скоростей $\boldsymbol{v}'$ пары жидких частиц могут быть какими угодно, если они удовлетворяют уравнению (27).

Из геометрических соображений понятно, что с ростом радиуса жидкой частицы r_0 количество бинарных связей при случайном расположении положений и скоростей должно расти, при этом одинарных бинарных связей будет все меньше. Другими словами, частицы будут взаимодействовать со многими другими частицами, т.е. можно говорить о наличии кластеров, в которых любая частица связана хотя бы с одной другой частицей кластера. Кластеры можно различать по числу частиц, которые в него включены, при это, конечно, кластеры с одинаковым числом частиц могут отличаться друг от друга в части конфигурации набора бинарных связей.

Пусть в некоторый момент времени t найдены все кластеры, которые в общем случае можно поделить на 2-кластеры, 3-кластеры, …, k-кластеры. Каждый из кластеров может быть представлен в виде множества своих структурных аналогов в количестве $n_2, n_3, \ldots, n_k$

соответственно. Дополним указанный ряд кластеров формально 1-кластером, когда частица, входящая в данный 1-кластер, не взаимодействует с другими частицами ансамбля. Пусть в текущий момент времени 1-кластеров — n_1 штук. В этом случае в любой другой момент времени должно выполняться равенство вида: $1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \ldots + k \cdot n_k = N$, где N — число жидких частиц, помещенных в ящик квадратной формы со стороной L.

Для численного моделирования ансамбля взаимодействующих жидких частиц необходимо уточнить вид угловых отклонений радиус-векторов относительных положений и скоростей взаимодействующих частиц (26). (27). Приведем примеры построения некоторых течений.

Например, удалось подобрать углы (27) таким образом, что исходное случайно равномерное расположение жидких частиц в ящике неустойчиво, оно распадется со временем на полосы тесно связанных частиц так, как это приведено на рис.1,а (маркерами в виде звезд нарисованы центры частиц). После образования полос частицы начинают взаимодействовать в рамках k-кластеров с большим, чем 2 значением k. На рис.1,б приведен пример течения, в котором образовалось четыре вихря, идентификация которых оказалась возможной после усреднения течений за определенный отрезок времени.

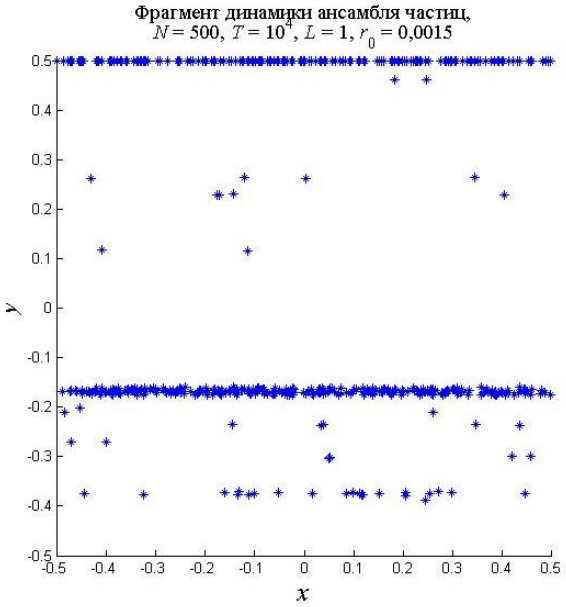

Рис.1,а. Пример течения, приводящего к сепарации исходного равномерно случайного распределения

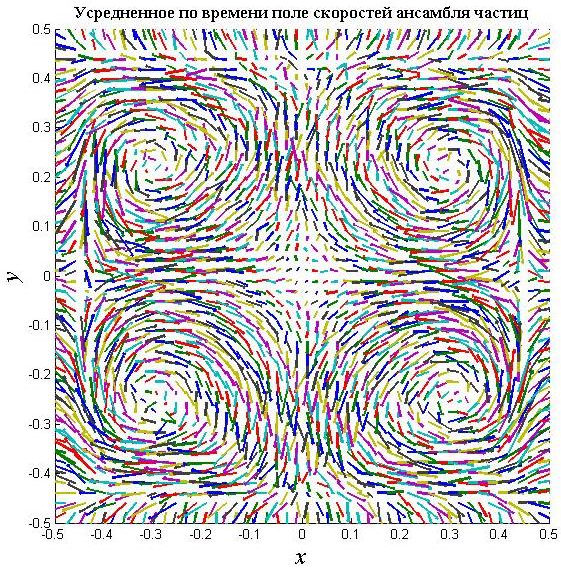

Рис.1,б. Образование течений с несколькими вихрями

Удалось построить довольно любопытный класс течений, в котором, по мере развертывания динамики ансамбля оказалось, что исходная кинетическая энергия, первоначально равномерно случайно распределенная между частицами, со временем перераспределяется в пользу небольшой группы частиц, скорости которых становятся заметно больше остальных. Течение с такими свойствами напоминает известный в теории твердого тела эффект Ферми-Паста-Улама. Для характеристики полученного распределения скоростей оно сравнивалось с распределением Максвелла. На рис.2 приведен результат.

На левом графике рис.2 приведены мгновенные положения центров пятисот жидких частиц. На среднем графике рис.2 построена эмпирическая гистограмма модулей скоростей ансамбля частиц после $T = 4500$ шагов по времени. Там же приведена кривая плотности Максвелла для модуля скорости. Видно, что построенная гистограмма и плотность Максвелла не имеют ничего общего. Согласно гистограмме большинство частиц (более 80%) практически покоятся. Наконец, на правом графике рис.2 приведена динамика во времени числа наиболее энергичных частиц, суммарная энергия которых составляет 90% от исходной. Из соответствующего графика отчетливо видно, что кривая со временем резко падает

и в дальнейшем колеблется в окрестности 30 частиц, доля которых по отношению к исходному количеству в $N = 500$ составляет — 6%.

Продемонстрируем принципиальную возможность воспроизводства произвольной картинки с помощью динамики ансамбля взаимодействующих частиц. Для этого с помощью подходящего алгоритма взаимодействия в ансамбле жидких частиц воспроизведем картинку в виде аббревиатуры Московского государственного университета на латинице, т.е. MSU (Moscow State University).

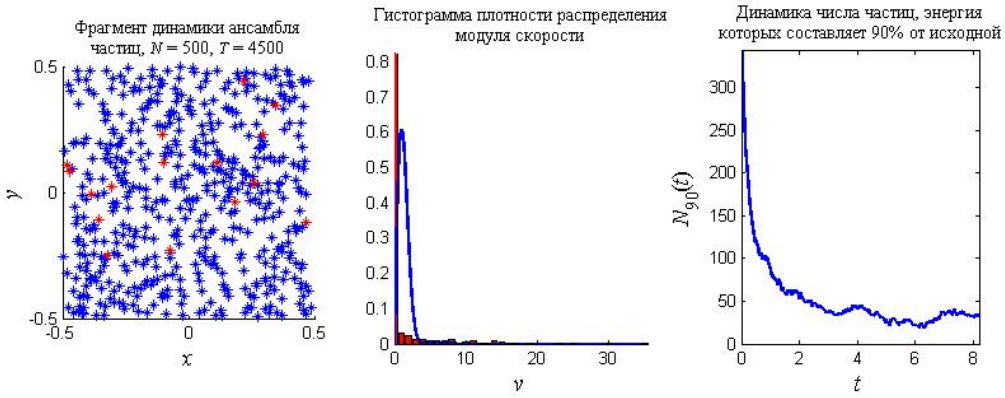

Рис.2. Фрагмент динамики ансамбля частиц, гистограмма плотности распределения модулей скорости частиц и график зависимости $N_{90} = N_{90}(t)$

На рис.3 приведен итог моделирования. На левом графике приведена исходная картинка в виде черных букв MSU на белом фоне. На правом графике мгновенное расположение центров $N = 5000$ жидких частиц. Отчетливо видно, что динамическое расположение центров частиц таково, что искомая картинка легко узнаваема невооруженным глазом.

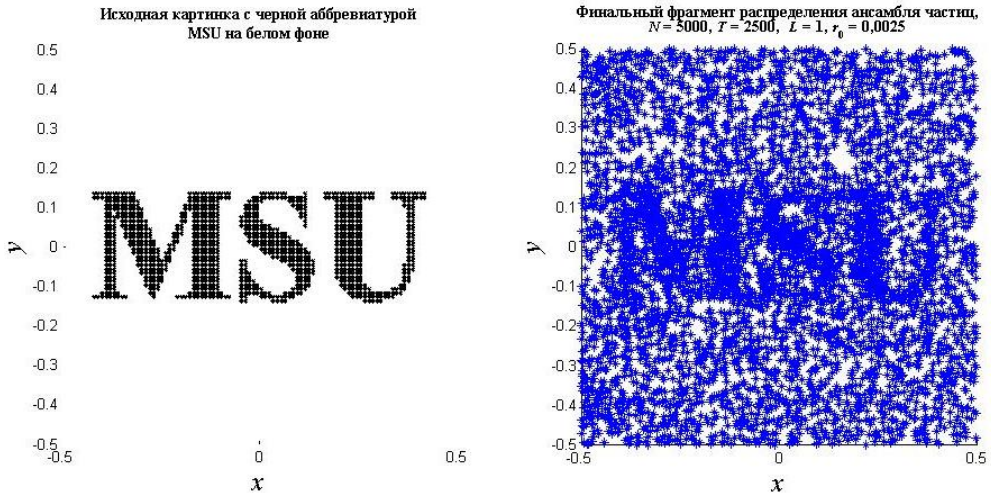

Рис.3. Пример воспроизводства исходной картинки в виде аббревиатуры MSU динамикой ансамбля жидких частиц

В данной краткой справке представлены основные вехи дискретной математической модели движения идеальной жидкости. Модель имела предысторию в лице математической модели турбулентного движения жидкости, построенной автором ранее. В отличие от прежней модели, в данной модели рассмотрен исключительно дискретный подход.

Идеальная жидкость представляется в виде конечного ансамбля так называемых жидких частиц, которые описываются протяженными геометрическими объектами в форме одинаковых кругов в двумерном и шаров в трехмерном случаях. При сближении таких частиц на расстоянии, меньшем двух радиусов они слипаются. Считается, что образовавшаяся промежуточная частица мгновенно распадается, при этом обеспечивается сохранение всех законов сохранения: импульса, энергии и момента импульса.

Подробно рассмотрен двухмерный, наиболее изученный случай. Удалось построить и изучить с помощью вычислительного эксперимента ряд любопытных течений. Удалось: обнаружить режимы, обеспечивающие сепарацию частиц в ансамбле, воспроизвести различного рода вихревые течения. Выявлены любопытные статистические свойства некоторых течений. Обнаружены течения, в которых происходит концентрация кинетической энергии в небольшой числе частиц ансамбля. Обнаружены и изучены также течения, в которых кинетическая энергия частиц калибруется. Кроме того, удалось в виде соответствующего течения жидких частиц ансамбля продемонстрировать принципиальную возможность путем манипуляции параметров взаимодействия воспроизвести любую наперед заданную картинку.

Модель включает разработку механизма взаимодействия, как на бинарном уровне, выступающем в качестве основного, так и в k-кластере, $k > 2$. Анализ механизмов взаимодействия на бинарном уровне и в k-кластере позволил выявить дополнительные степени свободы, учет которых привел к построению огромного семейства новых, в отдельных случаях неожиданных течений. Отметим, что идентификация дополнительных степеней свободы в механизме взаимодействия жидких частиц позволила непосредственно, т.е. рукотворно осуществить управление той стохастикой, которая, как нам представляется, характерна для турбулентных течений сплошной среды. В перспективе, как ожидается, управление стохастикой позволит с помощью метода Монте-Карло строить ансамбль конкретного течения и вычислять среднее течение, а также все прочие статистические характеристики в рамках выборочного метода статистики.

Модель №2. Вторая модель получила название “Реконструкция экономического оператора США”[8]. Представляемую модель можно отнести к классу эконометрических моделей. Изучается динамика 14 экономических показателей США за период с 2000 по 2012 гг. с ежеквартальной периодичностью. Определяется понятие “логарифмический индекс динамики”. Производится преобразование исходных данных к соответствующему набору логарифмических индексов динамики. Изучаются различного рода статистики всего набора логарифмических индексов. Оператор экономики США определяется с точки зрения того, как он управляет всеми 14-ю показателями, воздействуя на логарифмические индексы. Определяются аддитивная и мультипликативная меры управления оператором экономики США. По имеющемуся набору данных доказывается, что экономический оператор США реально существует. Изучаются корреляционные связи между всеми логарифмическими индексами, что позволило идентифицировать управленческую структуру оператора экономики США. В частности, отчетливо определилось управление двумя секторами: сектором реальной экономики и сектором потребления. В прогнозе на 2013 г. прогнозировались логарифмические индексы динамики, по которым восстанавливались реальные экономические показатели. Итог прогноза экономики США на 2013 г., помимо деталей поведения каждого из 14-и экономических показателей, свелся к выводу, что в 2013 г. в экономике США ничего экстраординарного не произойдет.

Основы данного подхода к изучению экономики США были заложены при моделировании и прогнозе на 2008 г. динамики экономики РФ[9]. Аналогичные процедуры с оценкой возможностей развития кризисных явлений в экономике РФ на 2010 г. были проведены в[10]. Там же были определены идентификаторы кризиса, которые позволили на примере экономики РФ определить временные рамки кризиса 2008 — 2009 гг.

---

[8] *Plokhotnikov K.E.* USA Economical Operator Reconstruction. *International Journal of Business and Economics Research.* Vol. 2, No. 5, 2013, pp. 98-111;
http://article.sciencepublishinggroup.com/pdf/10.11648.j.ijber.20130205.12.pdf ; *Плохотников К.Э.* Реконструкция экономического оператора США// Нелинейный мир, 2015, т.13, №3, с.56 – 68.

[9] *Плохотников К.Э.* Основы эконометрики в пакете STATISTICA: Учеб. пособие. — М.: Вузовский учебник, 2010. — 298с. + CD.

[10] *Плохотников К.Э.* Российская экономика в глобальном контексте/ Футурологический конгресс: будущее России и мира: материалы Всероссийской научной конференции, 4 июня 2010 г., Москва. — М.: Научный эксперт, 2010, с.482 — 512.

Перечислим 14 экономических показателей США, которые были выбраны в качестве базовых♥:

1. **I** — динамика валовых частных инвестиций, Gross Private Domestic Investment (в млрд. долл., источник данных: Federal Reserve Bank of St. Louis);
2. **M2** — денежный агрегат M2, M2 Money Stock (в долл. США, источник данных: Federal Reserve Bank of St. Louis);
3. **ED** — отношение курса евро к курсу доллара (данные отдельно по евро и доллару в единицах СПЗ (SDR) взяты с сайта Международного валютного фонда, согласно ключевым словам: IMF Exchange Rates, Currency units per SDR);
4. **GDP** — реальный валовый внутренний продукт, Real Gross Domestic Product (в млрд. долл., источник данных: Federal Reserve Bank of St. Louis);
5. **U** — отношение количества безработных к экономически активному населению, US Unemployment Rate;
6. **PI** — персональные доходы, Personal Income (в млрд. долл., источник данных Bureau of Economic Analysis);
7. **IPI** — индекс промышленного производства, Industrial Production Index (среднемесячный индекс за 2007 г. берется за 100%, источник данных: Federal Reserve Bank of St. Louis);
8. **Retail** — розничный товарооборот, Retail sales (в млн. долл., без учета сезонных колебаний, источник данных);
9. **CPI** — индекс потребительских цен, Consumer Price Index (декабрь 1999 г. берется за 100%, источник данных: Bureau of Labor Statistics);
10. **Im** — импорт, Imports (среднемесячный индекс за 2000 г. берется за 100%, источник данных: Bureau of Labor Statistics);
11. **Ex** — экспорт, Exports (среднемесячный индекс за 2000 г. берется за 100%, источник данных: Bureau of Labor Statistics);
12. **ND** — государственный долг США, USA National Debt (в долл. США, источник данных);
13. **FER** — эффективная ставка по федеральным фондам, Series Description, “Federal Funds Effective Rate” (доходность в % в год, источник данных: Board of Governors of the Federal Reserve System);
14. **FGR** — текущие поступления в бюджет США, Federal Government Current Receipts (в млрд. долл., источник данных: Bureau of Economic Analysis);

В качестве примера данных на рис.1 приведены два графика: валовый внутренний продукт США, **GDP** (рис.1,а) и государственный долг США, **ND** (рис.1,б). На рис.1,а приведен график динамики валового внутреннего продукта США за период с 1947/01/01 по 2012/10/01 с квартальной частотой. На рис.1,б приведен график динамики государственного долга США за период с 1993/01/01 по 2012/10/01 с месячной частотой.

Учитывая широкую распространенность в природе логнормального распределения и, соответственно, логарифмического преобразования при анализе данных, введем далее понятие “логарифмический индекс динамики”. Важность логнормального распределения в экономике можно оценить в связи с оценкой будущей доходности акций, опционом, фьючерсов и других производных финансовых инструментов.

Пусть имеется некоторый экономический показатель x, временная динамика которого представлена в виде ряда $x_1,\ldots,x_N$, тогда, по определению, набор

$$Lid_x_t = \ln\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right),\ t = 1,\ldots,N-1 \qquad (1)$$

назовем *логарифмическим индексом динамики* показателя x.

Согласно определению в (1) логарифмический индекс динамики относится к классу цепных индексов. В дальнейшем в отдельных случаях логарифмический индекс динамики

♥ Сбор данных производился в течение января — февраля 2013 г., конкретные ссылки приведены в цитированных статьях автора.

будем обозначать в следующем сокращенном виде: $L_t = Lid_x_t$, $t = 1,\ldots,N-1$. Если в нашем распоряжении имеется набор логарифмических индексов L_t, $t = 1,\ldots,N-1$, то, согласно определению (1), можно восстановить значения экономического показателя, т.е.

$$x_t = x_1 \exp(\sum_{i=1}^{t-1} L_i),\ t = 2,...,N\,. \qquad (2)$$

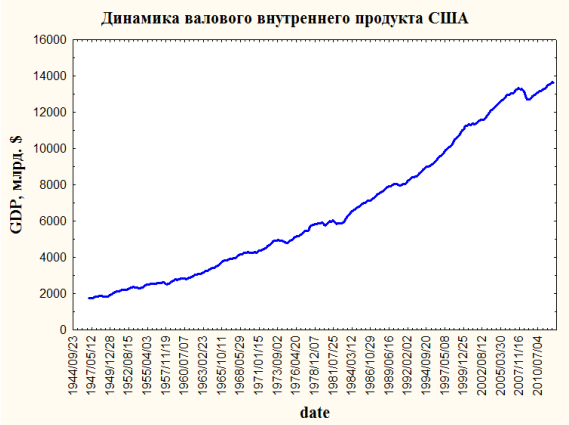

Рис.1,а. Динамика валового внутреннего продукта США с 1947/01/01 по 2012/10/01 с квартальной частотой, в млрд. долл. США

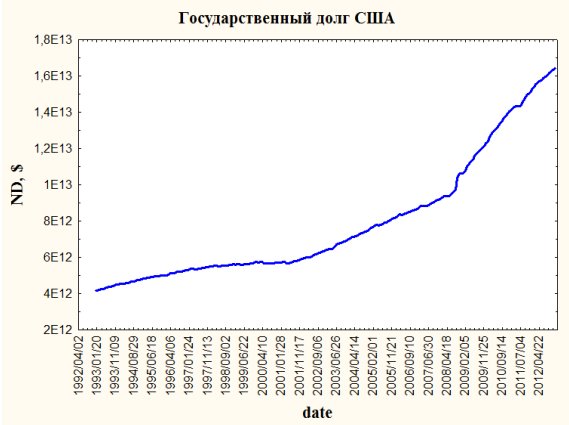

Рис.1,б. Динамика государственного долга США с 1993/01/01 по 2012/10/01 с месячной частотой, в долл. США

Согласно формуле (2), если в нашем распоряжении имеется начальное значение показателя x_1 и логарифмические индексы L_t, $t = 1,\ldots,N-1$, то можно восстановить экономический показатель x_t во все последующие моменты времени $t = 2,\ldots,N$.

На рис.2 приведены примеры ежеквартальных логарифмических индексов динамики валового внутреннего продукта (рис.2,а) и государственного долга США (рис.2,б).

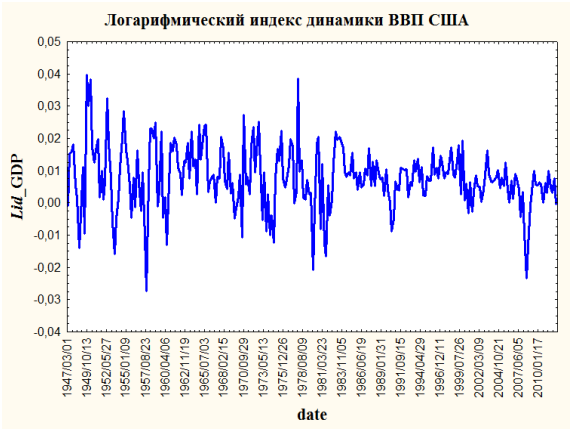

Рис.2,а. Логарифмический индекс динамики ВВП США за период 1947/01/01 — 2012/10/01

Рис.2,б. Логарифмический индекс динамики государственного долга США за период 1993/01/01 — 2012/10/01

Согласно рис.2,а логарифмический индекс динамики ВВП колеблется вокруг нуля, преимущественно находясь выше нуля. Чтобы проверить последнее предположение с точки зрения статистики, найдем среднее, стандартное отклонение индекса и количество наблюдений. Они составили 0,0078; 0,01; 263 соответственно. Выберем уровень значимости 0,05 и проверим неравенство: $0{,}0078 > -\Phi^{-1}(0{,}05/2;0;1)\cdot\frac{0{,}01}{\sqrt{263}}$, где Φ^{-1} — функция, обратная нормальной функции распределения. Неравенство в рамках двухстороннего критерия было проверено♥, оказалось, что оно верно. Таким образом, на уровне значимости 0,05 можно

♥ Проверка проводилась на базе пакета MATLAB

быть уверенным, что логарифмический индекс динамики ВВП США в среднем положителен, вследствие чего ВВП со временем растет. Аналогично для логарифмического индекса государственного долга США на рис.2,б найдем среднее значение, стандартное отклонение индекса и количество наблюдений, которые оказались равными 0,017; 0,013; 79. Проверяя неравенство $0{,}017 > -\Phi^{-1}(0{,}05/2;0;1)\cdot\frac{0{,}013}{\sqrt{79}}$, убеждаемся в его правильности.

Сравним обычный индекс I с логарифмическим индексом динамики L. Запишем определения обоих индексов в сопоставимой форме:

$$I_t = \frac{x_{t+1}}{x_t} - 1,\ L_t = \ln\frac{x_{t+1}}{x_t},\ t = 1,\ldots,N-1. \qquad (3)$$

Индексам динамики в (3) соответствуют формулы вида: $I(\xi) = \xi - 1$, $L(\xi) = \ln\xi$, внешний вид которых приведен на рис.3,а.

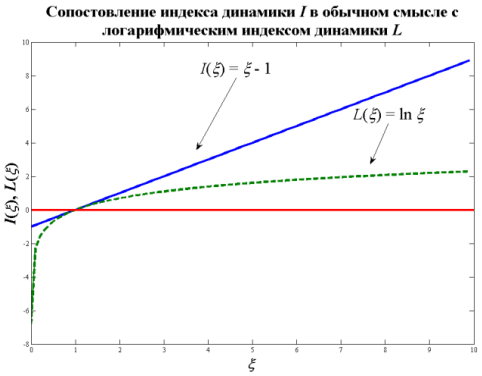

Рис.3,а. Сопоставление индекса динамики I в обычном смысле с логарифмическим индексом динамики L

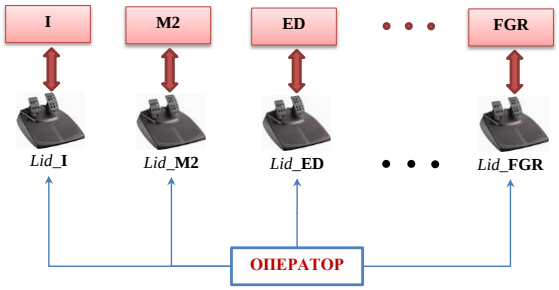

Рис.3,б. Образ того, как позиционируются экономические показатели, соответствующие логарифмические индексы динамики и реконструируемый оператор

Согласно рис.3,а оба индекса близки друг к другу и к нулю в окрестности $\xi = 1$, т.е. в нейтральной точке, которая характеризует отсутствие изменения показателя. При $\xi > 1$, т.е. при росте показателя, обычный индекс всегда больше логарифмического. При $0 < \xi < 1$, т.е. при уменьшении показателя, обычный индекс меняется в конечном диапазоне $(-1;0)$, тогда как логарифмический — в полубесконечном диапазоне $(-\infty;0)$.

Отметим, что большие значения логарифмического индекса, т.е. значения $|L| > 1$, редкость для типичного набора экономических показателей. Это обстоятельство является важным, поскольку именно логарифмические индексы динамики позволяют сделать самые разнообразные экономические показатели сопоставимыми. Данную сопоставимость будем понимать с точки зрения управления экономикой некоторым оператором.

На рис.3,б приведен образ реконструируемого оператора, который нажимает на педали “газа” и “тормоза” под названием: динамика валовых инвестиций, **I**; денежный агрегат **M2**; отношение курса евро к курсу доллара, **ED**; …; текущие поступления в бюджет США, **FGR**. Считается, что тот или иной показатель ускоряется оператором, когда логарифмический индекс показателя положителен и, наоборот, замедляется, когда индекс отрицателен.

Определим меру κ управляющего воздействия оператора на некоторый экономический показатель x, представленный в виде временного ряда $x_1,\ldots,x_N$. Определим логарифмический индекс динамики Lid_x_t, $t = 1,\ldots,N-1$ и величину вида:

$$\eta_t = \frac{|Lid_x_t - \mathrm{mean}(Lid_x)|\sqrt{N-1}}{-\Phi^{-1}(\alpha/2,0,1)\times \mathrm{S.D.}(Lid_x)}, \qquad (4)$$

$t = 1,\ldots,N-1$, $\Phi(u,0,1)$ — нормальная функция распределения со средним 0 и стандартным отклонением 1, α — уровень значимости, mean и S.D. — средняя величина и стандартное отклонение ряда Lid_x_t, $t = 1,\ldots,N-1$.

Если величина $\eta_t \le 1$, то это означает, что на уровне α значение Lid_x_t незначимо отличается от среднего значения логарифмического индекса mean(Lid_x). Если величина η_t

> 1, то это означает, что на уровне α значение Lid_x_t значимо отличается от среднего значения логарифмического индекса mean(Lid_x). С выполнения условия $\eta_t > 1$ можно говорить о значимом управлении оператором данного экономического показателя. Введем меру управления оператором экономического показателя по формуле:

$$\kappa_t = \eta_t \theta(\eta_t - 1), \quad (5)$$

где $t = 1,\ldots,N-1$, θ — единичная функция, т.е. $\theta(u) = 1$, $u > 0$ и $\theta(u) = 0$, $u < 0$. На рис.4 приведен график функции (5), т.е. функции $\kappa(\xi) = \xi\theta(\xi - 1)$.

Согласно формулам (4), (5), мера управления оператором отдельного показателя зависит от выбранного уровня значимости α. Таким образом, реконструируемый нами оператор экономики США будет проявлен, идентифицирован в связи с выбранным уровнем значимости α.

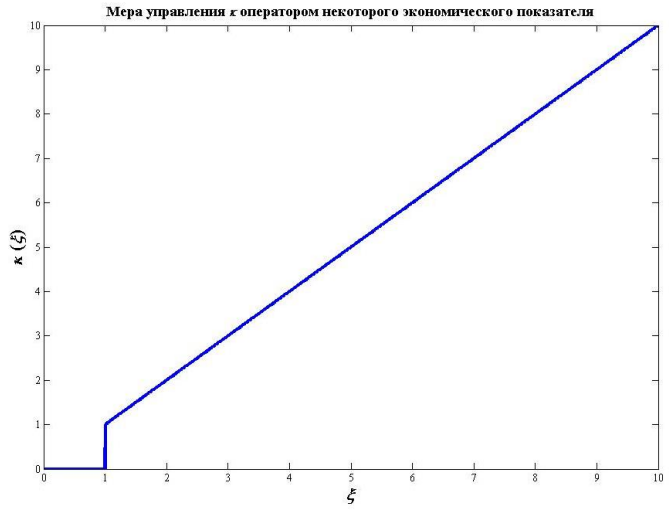

Рис.4. Мера управления κ оператором некоторого экономического показателя

Поскольку оператор управляет несколькими показателями, постольку имеет смысл определить меру управления системы экономических показателей. Пусть определена мера управления $\kappa^{(m)}$, $m = 1,\ldots,M$ каждого из M показателей. Определим две меры управления системы показателей. Условно назовем их “аддитивная мера управления экономикой”, Mc_a, и “мультипликативная мера управления экономикой”, Mc_m. Определим их по формулам:

$$Mc_a_t = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\kappa_t^{(m)}, \quad (6)$$

$$Mc_m_t = \sqrt[M]{\prod_{m=1}^{M}\kappa_t^{(m)}}, \quad (7)$$

где $t = 1,\ldots,N-1$.

Меры управления (6), (7) являются ничем иным, как средним арифметическим и средним геометрическим соответственно, они разнятся в следующем. Если хотя бы одна из мер в наборе $\kappa^{(m)}$, $m = 1,\ldots,M$ равна нулю, то в отличие от аддитивной меры Mc_a, мультипликативная мера Mc_m обращается в ноль.

Построим на уровне значимости 0,05 и 0,01 зависимости аддитивной Mc_a и мультипликативной Mc_m мер управления от времени применительно к 14-и экономическим показателям экономики США. Занумеруем поквартальные моменты времени 2000/01/01, 2000/04/01, …, 2012/07/01 индексом t, который пробегает значения 1,…,51. На рис.5 приведены графики двух мер управления в зависимости от времени t, $t = 1,\ldots,51$ для двух уровней значимости.

Согласно рис.5,а аддитивная мера управления больше мультипликативной меры в каждый из моментов наблюдения. Отличие от нуля мультипликативной меры означает, что

оператор статистически значимо управляет всеми 14-ю показателями. Это имеет место для двух моментов времени. В таблице №1 приведены значения данных моментов времени, а также значения аддитивной и мультипликативной мер управления оператором экономикой США.

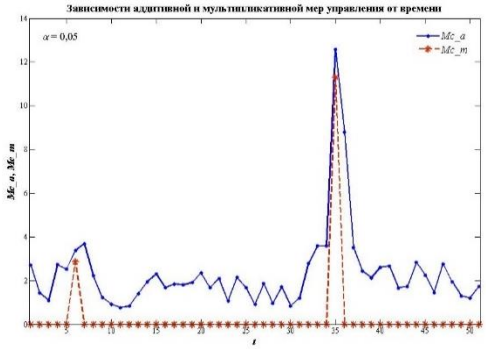

Рис.5,а. Зависимости аддитивной *Mc_a* и мультипликативной *Mc_m* мер управления от времени на уровне значимости 0,05

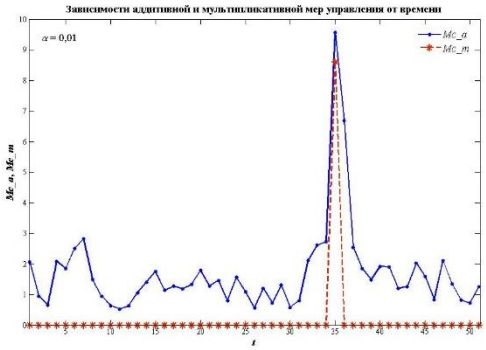

Рис.5,б. Зависимости аддитивной *Mc_a* и мультипликативной *Mc_m* мер управления от времени на уровне значимости 0,01

В таблице №1 наряду с мировым финансовым кризисом, разразившемся в четвертом квартале 2008 г. (2008/10/01), есть еще один момент времени 2001/07/01, когда экономический оператор нажимал на все 14 педалей одновременно. При этом мировой финансовый кризис в среднем регулировался экономическим оператором в четыре раза интенсивней, чем в другой момент времени.

Таблица №1. Два особых момента времени и численные значения аддитивной и мультипликативной мер управления экономикой США

Time	t = 6; 2001/04/01(2001/07/01)	t = 35; 2008/07/01(2008/10/01)
Mc_a	3,373	12,568
Mc_m	2,857	11,299

Таким образом, на уровне значимости 0,05 экономический оператор США в полной мере проявился, т.е. активно управлял одновременно всеми 14-ю показателями в моменты времени 2001/07/01, 2008/10/01. В остальные моменты времени он осуществлял управление меньшим числом показателей, при этом нет ни одного момента времени из интервала 2000/04/01 — 2012/10/01, когда-бы экономический оператор не управлял ни одним из показателей.

Определим аддитивную и мультипликативную меры управления на уровне значимости 0,01. На рис.5,б приведен ответ в виде двух графиков зависимости аддитивной и мультипликативной мер управления от времени. Из графика мультипликативной меры, *Mc_m* видно, что остался только один пик по сравнению с двумя на аналогичном графике рис.5,а. Этот пик относится к дате 2008/07/01 (2008/10/01), что соответствует дате начала мирового финансового кризиса. Отметим, что меры управления на момент 2008/07/01 (2008/10/01) составили *Mc_a* = 9,563; *Mc_m* = 8,598, что несколько меньше соответствующих показателей таблицы №1. Таким образом, на уровне значимости 0,01 имеет место один-единственный момент времени 2008/07/01 (2008/10/01), когда экономический оператор США проявился в полной мере, т.е. он активно воздействовал на все 14 экономических показателей одновременно.

Оценим вероятность проявления экономического оператора в каждый из имеющихся моментов времени, *t*, t = 1,…,51. Для этого положим, что каждый из логарифмических индексов $L_t^{(m)}$, t = 1,…,51; m =1,…,14 приближенно можно описать нормальным законом со средним mean($L^{(m)}$) и стандартным отклонением S.D.($L^{(m)}$),. Определим вероятность

$p_t^{(m)}$ отклонения логарифмического индекса $L_t^{(m)}$ от среднего значения mean($L^{(m)}$) по формуле:

$$p_t^{(m)} = \begin{cases} 2\Phi(L_t^{(m)}, \text{mean}(L^{(m)}), \text{S.D.}(L^{(m)})), & L_t^{(m)} < \text{mean}(L^{(m)}); \\ 2(1-\Phi(L_t^{(m)}, \text{mean}(L^{(m)}), \text{S.D.}(L^{(m)}))), & L_t^{(m)} \geq \text{mean}(L^{(m)}); \end{cases} \quad (8)$$

где Ф — функция нормального распределения со средним значением mean($L^{(m)}$) и стандартным отклонением S.D.($L^{(m)}$); t = 1,…,51; m =1,…,14.

Вероятность (8) нормирована таким образом, что она равняется единице, когда логарифмический индекс в точности совпадает со средним значением. По мере удаления от среднего вероятность уменьшается и стремится к нулю. Считая вероятности логарифмических индексов $p_t^{(1)},...,p_t^{(14)}$ независимыми, найдем вероятность в момент t всей системы показателей P_t, т.е.

$$P_t = \prod_{m=1}^{14} p_t^{(m)}, \quad (9)$$

где t = 1,…,51.

На рис.6 приведена динамика вероятности совместного отклонения логарифмических индексов от средних величин в зависимости от времени t, t = 1,…,51, вычисленная по формулам (8), (9). Отметим резкий пик в поведении вероятности, который приходится на момент времени соответствующий началу мирового кризиса t = 35 (2008/07/01 (2008/10/01)). Поскольку по оси ординат выбрана логарифмическая шкала, постольку оказывается, что вероятность наступления финансового кризиса более чем на сорок порядков меньше фоновых значений вероятности. Если предположить, что финансовый кризис сформировался случайно, то вероятность такого события в рамках рассмотренной системы показателей чудовищно мала, порядка 10^{-50}. Столь малая вероятность заставляет предположить, что оператор экономики США действительно существует и он ответственен за проявление мирового финансового кризиса.

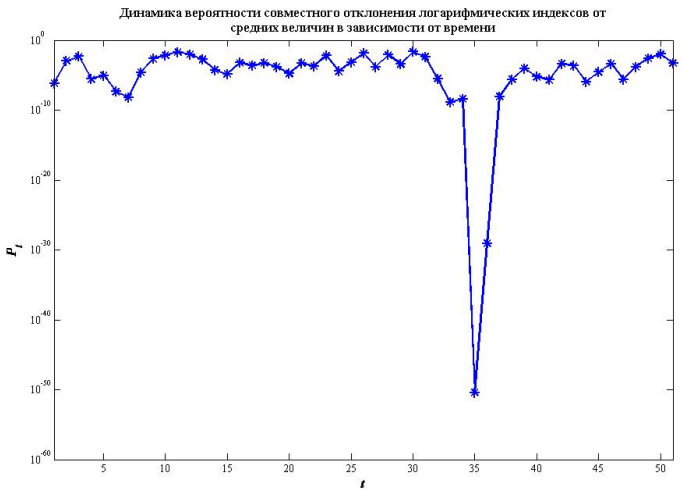

Рис.6. Динамика вероятности совместного отклонения логарифмических индексов от средних величин в зависимости от времени

Дальнейшее развертывание модели, а также возможные перспективы разработки этого направления представлены в цитированных выше статьях.

Модель №3. Третья модель получила название “Математическая модель геополитики”[11]. Математическая модель геополитики условное название для нескольких моделей,

[11] *Плохотников К.Э.* Математическая модель геополитики // Мировая политика. — 2017. – № 3. – С.23–74. DOI: 10.25136/2409-8671.2017.3.23674. URL: http://e-notabene.ru/wi/article_23674.html; *Плохотников К.Э.* Геополитика в терминах климата, рельефа и трафика/ Форсайт глобализации: политика, экономика, управление: Монография [под ред. А.В. Бредихина]. – М.: АНО ЦЭМИ, 2018, с.71 – 114; ISBN 978-5-600-

которые естественным образом связаны и выступают в качестве сопровождения главной тематики — геополитики.

Вводится центральное понятие математической модели геополитики — емкость среды обитания. Геополитика — это климат, рельеф, особенности логистики глобальных товарных потоков, геополитическое противостояние в терминах “море – континент”, т.е. все то, что составляет материальный комплекс условий существования жителей Земли. Данный комплекс, в значительной степени, опосредует поведение народонаселения с политической точки зрения. Автор не придерживается позиции природного детерминизма, который выступает в форме геополитики, но пытается очертить рамки проявления геополитики в реальной политике. Во всех построенных в работе математических моделях производится переход к вычислительному эксперименту, результаты которого приводятся и обсуждаются. Базой вычислительного эксперимента выступают данные по климату, рельефу, народонаселению, а также ряд других компонентов, характерных для современных геоинформационных систем.

Математика предложенных моделей, предполагает знание основ: численных методов, статистики, методов оптимизации и ряд других дисциплин. Произведена развертка плотности емкости среды обитания по государствам. Среди рекордсменов в убывающей последовательности ожидаемо оказались: Россия, США, Бразилия, Китай, Австралия и т.д. Определен и изучен показатель, имеющий смыл удельной емкости среды обитания в расчете на душу населения. Произведено ранжирование стран и территорий по этому показателю. Особое внимание обращено на соотношение данных показателей отдельных стран по отношению к РФ. Изучен вопрос о взаимоотношении плотности емкости среды обитания и рельефа. Строятся и сравниваются территории, где сосредоточено 50% народонаселения и 50% емкости среды обитания. Строятся поля градиента плотности емкости среды обитания. Производится классификация стран и территорий в терминах “высоко – невысоко” и “благоприятно – неблагоприятно”, т.е. в четырех категориях, учитывающих рельеф и плотность емкости среды обитания. Строятся карты территорий всех четырех типов. Вводится и подсчитывается индекс разнообразия отдельных территорий и государств.

В рамках калькуляции глобального трафика построен специальный показатель под названием процентное соотношение “море – континент”. На основе данного показателя производится классификация точек (территорий) в геополитических терминах. Этот показатель позволил формализовать введение таких хорошо известных в геополитике понятий, как “Хартленд” и “Римленд”. Построены комбинированные глобальная и региональные карты, содержащие политическую и геополитическую разметки. Произведен анализ данных карт на предмет наличия так называемых геополитических “разломов”. О наличии разломов можно говорить в том случае, если некоторые геополитические линии проходят не по границе отдельного государства, а по его территории, глубоко в нее вклиниваясь. Приведено численное решение задачи оптимального с точки зрения минимума затрат на транспорт распределения точек, выступающих в качестве логистических узлов на поверхности Земли.

В ряде работ автора[12] сформулирована “Нормативная модель глобальной истории”. В основе данной модели лежит представление глобальной политической целостности в виде набора атомарных субъединиц, названных геопатомами (ГЕОПолитические АТОМы). Представляется, что текущее политическое строение территорий проживания людей на

02135-8; https://docs.wixstatic.com/ugd/966b90_887f8d47257e4a7ba4e364fd13e82c95.pdf; *Plokhotnikov K.E.* Mathematical model of geopolitics, e-book. — Society for Science and Education. Promoting Education and Research, United Kingdom, 2018. — 66p. http://scholarpublishing.org/sse/wp-content/uploads/2018/08/ABR-4819.pdf

[12] *Плохотников К.Э.* Нормативная модель глобальной истории. — М.: Изд-во МГУ, 1996. 64с.; *Плохотников К.Э.* Эсхатологическая стратегическая инициатива: Исторический, политический, психологический и математический комментарии. — М.: Изд-во МГУ, 2001. 182с.; *Плохотников К.Э.* Эсхатологическая стратегическая инициатива: исторический, политический, психологический и математический комментарии. – 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 251с.

Земле, в значительной степени, может быть объяснено путем объединения специально приготовленных более мелких территорий — геопатомов. В связи с данной гипотезой возникает задача построения набора геопатомов, покрывающих всю территорию Земли.

Для адекватной нарезки территории Земли на отдельные геопатомы необходимо учесть климатические особенности территорий, а также рельеф. Кроме того, необходимо также учесть глобальный трафик, который заметно меняет конфигурацию расположения и форму геопатомов.

Для учета климатических особенностей проживания на тех или иных территориях будет сформулировано понятие “емкость среды обитания”. Будет построена подходящая функция плотности емкости среды обитания, которая включит в себя весь комплекс антропоморфных требований к среде обитания в части климата. Территории проживания людей будут классифицированы в терминах “(не)высоко – (не)благоприятно”, т.е. с учетом высоты над уровнем моря и климатических особенностей.

В части моделирования глобального трафика особенно остро проявится центральное геополитическое противостояние между “морем” и “континентом”, о чем предупреждали классики геополитики. Формулировка алгоритма и подсчет с его помощью глобальных транспортных потоков позволит уточнить и обобщить классификацию всех территорий в общепринятых геополитических категориях.

Построим математическую модель того, что называют по-разному в разных дисциплинах: емкость среды обитания, жизненное пространство и пр. Нас будет интересовать построение меры объема среды обитания путем учета различного рода наиболее важных природных составляющих, сопровождающих жизнь людей. К таким составляющим отнесем, прежде всего, среднегодовые значения температуры и осадков на поверхности Земли.

Пространственную развертку в модели свяжем с координатами широты, φ и долготы, λ поверхности Земли, считая, что $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ — в радианах или $\varphi \in [-90^0, 90^0]$, $\lambda \in [-180^0, 180^0]$ — в градусах. Для подбора подходящей формулы связи плотности емкости среды обитания, ρ с среднегодовой температурой T_{annual} и осадками Q_{annual} привлечем реальные данные, имеющиеся для всей поверхности Земли.

Введем комфортные с точки зрения проживания людей значения температуры, T_{comfort} и осадков, Q_{comfort} согласно средневзвешенной процедуре, выбирая в качестве веса плотность проживания людей на поверхности Земли, p_{density}. В этом случае можно записать следующую общую формулу для подсчета T_{comfort} и Q_{comfort}:

$$T_{\text{comfort}} = \frac{\iint T_{\text{annual}} p_{\text{density}} \cos\varphi d\varphi d\lambda}{\iint p_{\text{density}} \cos\varphi d\varphi d\lambda}, Q_{\text{comfort}} = \frac{\iint Q_{\text{annual}} p_{\text{density}} \cos\varphi d\varphi d\lambda}{\iint p_{\text{density}} \cos\varphi d\varphi d\lambda}, \qquad (1)$$

где $T_{\text{annual}} = T_{\text{annual}}(\varphi, \lambda)$, $Q_{\text{annual}} = Q_{\text{annual}}(\varphi, \lambda)$, $p_{\text{density}} = p_{density}(\varphi, \lambda)$ — соответствующие функции широты и долготы; интегрирование в (1) предполагается по всему глобусу без учета водной поверхности.

Выберем разрешение по пространству в $0{,}5^0$ градусов и рассмотрим конкретные данные для среднегодовых значений температуры, осадков и плотности населения. В этом случае данные предстанут в виде матриц размером 360×720, где 360 обозначает количество узлов равномерной сетки по широте, а 720 — по долготе. Сетки по широте и долготе в радианах можно представить в виде: $\varphi_i = (\pi/180)[-89{,}75 + 0{,}5(i-1)], i = 1, \dots, 360$; $\lambda_j = (\pi/180)[-179{,}75 + 0{,}5(j-1)], j = 1, \dots, 720$.

Загрузим данные по среднегодовым значениям температуры и осадков с сайта[13]. Выберем версию архива 2.02, которая датирована июлем 2001 года. Описание к данным архива приведено на сайте[14]. Данные по плотности населения Земли возьмем с сайта NASA Earth Observations[15]. Заменим интегрирование в (1) суммированием по нашей сетке, тогда

[13] http://climate.geog.udel.edu/~climate/html_pages/download.html#lw_temp2
[14] http://climate.geog.udel.edu/~climate/html_pages/README.lw2.html
[15] http://neo.sci.gsfc.nasa.gov/view.php?datasetId=SEDAC_POP

$$T_{\text{comfort}} \cong \frac{\sum_{i,j} T_{\text{annual},i,j} p_{\text{density},i,j} \cos\varphi_i}{\sum_{i,j} p_{\text{density},i,j} \cos\varphi_i}, Q_{\text{comfort}} \cong \frac{\sum_{i,j} Q_{\text{annual},i,j} p_{\text{density},i,j} \cos\varphi_i}{\sum_{i,j} p_{\text{density},i,j} \cos\varphi_i}, \quad (2)$$

где суммирование в (2) осуществляется по тем узлам сетки, которые не принадлежат водной поверхности.

По формуле (2) был проведен расчет с данными из архива 2.02 и данными NASA по плотности населения, оказалось, что $T_{\text{comfort}} = 18{,}5775^0 C$; $Q_{\text{comfort}} = 1200{,}2$ мм.

Были подсчитаны также средневзвешенные стандартные отклонения от комфортных значений, они оказались равными $T_{\text{comfort,std}} = 7{,}9084^0 C$ и $Q_{\text{comfort,std}} = 722{,}5299$ мм соответственно для температуры и осадков. Столь заметные стандартные отклонения означают, что предполагаемая зависимость емкости среды ρ от отклонений от комфортных значений в форме степенных выражений типа $|T/T_{\text{comfort}} - 1|^{\alpha}$ и $|Q/Q_{\text{comfort}} - 1|^{\beta}$ должна иметь малые по сравнению с единицей значения степеней α и β.

После ввода комфортных значений температуры и осадков, выберем для дальнейшего анализа следующую формулу для описания плотности емкости среды обитания:

$$\rho = \rho(T, Q) = e^{a_1 + a_2 |T/T_{\text{comfort}} - 1|^{\alpha} + a_3 |Q/Q_{\text{comfort}} - 1|^{\beta}}, \quad (3)$$

где $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta$ — пока неопределенные константы.

В представлении (3) сосредоточен весь набор требований к функции ρ. Функция, описывающая емкость среды, ρ должна быть неотрицательной, зависеть от отклонений от комфортных значений, легко модифицируемой в случае учета дополнительного параметра, описывающего емкость среды.

Неопределенные параметры a_1, a_2, a_3, входящие в (3) найдем путем минимизации суммы квадратов отклонений обратной функции емкости среды, $1/\rho$ от обратной функций плотности народонаселения, $1/p_{\text{density}}$. Выяснилось, что именно в этом случае обеспечивается максимум корреляции величины обратной функции емкости среды и обратной величины плотности населения, $s_{\text{density}} = 1/p_{\text{density}}$. Величина s_{density} имеет ясный географический смысл — это количество квадратных километров, приходящихся на одного человека в данном регионе, если p_{density} измеряется в количестве людей на квадратный километр.

С учетом (1) запишем функционал, D минимум которого обеспечивает поиск параметров a_1, a_2, a_3 при фиксированных значениях α, β:

$$D = D(a_1, a_2, a_3) = \frac{\iint [\rho^{-1}(\varphi,\lambda) - p_{\text{density}}^{-1}]^2 \cos\varphi d\varphi d\lambda}{\iint \cos\varphi d\varphi d\lambda} \longrightarrow \min_{a_1, a_2, a_3} D, \quad (4)$$

где интегрирование предполагается по всей суше, без учета водной поверхности.

Учитывая (2), перепишем функционал (4) в конечно-разностном виде, исходя, как и выше, из разрешения в $0{,}5^0$. В этом случае, с точностью до численного коэффициента, получим

$$D = D(a_1, a_2, a_3) \cong \frac{1}{N} \sum_{i,j} [\rho_{i,j}^{-1} - p_{\text{density},i,j}^{-1}]^2 \cos\varphi_i, \quad (5)$$

где $i = 1, \ldots, 360$; $j = 1, \ldots, 720$; N — количество узлов сетки на поверхности суши, а суммирование распространяется лишь на те узлы сетки, которые приходятся на сушу.

Для поиска минимума функционала в форме (5) решалась задача градиентного спуска

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{\partial D(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_k}, k = 1,2,3, \quad (6)$$

где t — некоторый условный аргумент, при этом

$$\frac{\partial D}{\partial a_1} = -\frac{2}{N} \sum_{i,j} \rho_{i,j}^{-1} (\rho_{i,j}^{-1} - p_{\text{density},i,j}^{-1}) \cos\varphi_i,$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_2} = -\frac{2}{N} \sum_{i,j} |T_{i,j}/T_{\text{comfort}} - 1|^{\alpha} \rho_{i,j}^{-1} (\rho_{i,j}^{-1} - p_{\text{density},i,j}^{-1}) \cos\varphi_i,$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_3} = -\frac{2}{N} \sum_{i,j} |Q_{i,j}/Q_{\text{comfort}} - 1|^{\beta} \rho_{i,j}^{-1} (\rho_{i,j}^{-1} - p_{\text{density},i,j}^{-1}) \cos\varphi_i.$$

Система дифференциальных уравнений (6) может быть решена с помощью одного из стандартных решателей, например, пакета MATLAB. Решение проводилось вплоть до установления значений a_1, a_2, a_3, т.е. когда можно отчетливо идентифицировать наличие пределов значений a_1, a_2, a_3 при $t \to +\infty$.

В таблице №1 приведен перечень значений параметров, входящих в формулу (3) для емкости среды, полученный с учетом решения задач (2), (5), (6). Кроме того, в таблице №1 приведены соответствующие значения коэффициента корреляции, Corr, который устанавливает связь между наборами $\{\rho_{i,j}^{-1}\}$ и $\{p_{\text{density},i,j}^{-1}\}$, i = 1,…,360; j = 1,…,720. С учетом особенностей геометрии на сфере, корреляция подсчитывалась по формуле:

$$\text{Corr} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i,j}(\rho_{i,j}^{-1}-\overline{\rho^{-1}})(p_{\text{density},i,j}^{-1}-\overline{p_{\text{density}}^{-1}})\cos\varphi_i}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i,j}(\rho_{i,j}^{-1}-\overline{\rho^{-1}})^2\cos\varphi_i}\cdot\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i,j}(p_{\text{density},i,j}^{-1}-\overline{p_{\text{density}}^{-1}})^2\cos\varphi_i}}, \quad (7)$$

где

$$\overline{\rho^{-1}} = \frac{1}{N}\sum_{i,j}\rho_{i,j}^{-1}\cos\varphi_i,\ \overline{p_{\text{density}}^{-1}} = \frac{1}{N}\sum_{i,j}p_{\text{density},i,j}^{-1}\cos\varphi_i.$$

Таблица №1. Перечень значений параметров, входящих в формулу емкости среды обитания

№№	T_{comfort}	Q_{comfort}	a_1	a_2	a_3	α	β	Corr
1	18,5775	1200,2	0,7156	–0,0649	–0,0426	2	2	0,5758
2	18,5775	1200,2	1,0227	–0,2767	–0,2991	1	1	0,6329
3	18,5775	1200,2	1,6592	–0,6627	–0,6656	0,5	0,5	0,6581
4	18,5775	1200,2	6,2794	–3,2566	–2,7573	0,1	0,1	0,6590
5	18,5775	1200,2	3,4189	–1,6624	–1,4789	0,2	0,2	0,6611

На рис.1 приведены типичные образцы зависимости модуля градиента $G = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial a_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial a_3}\right)^2}$ и значения функционала (5), D от аргумента t. Графики рис.1 демонстрируют очевидную сходимость модуля градиента G к нулю (левый график), а значение функционала D к некоторому предельному, минимальному значению (правый график). Это означает, что набор параметров a_1, a_2, a_3 сходится к своим предельным значениям при $t \to +\infty$. Остальные значения параметров выбирались согласно пункту №5 таблицы №1, когда имело место максимальное значение корреляции.

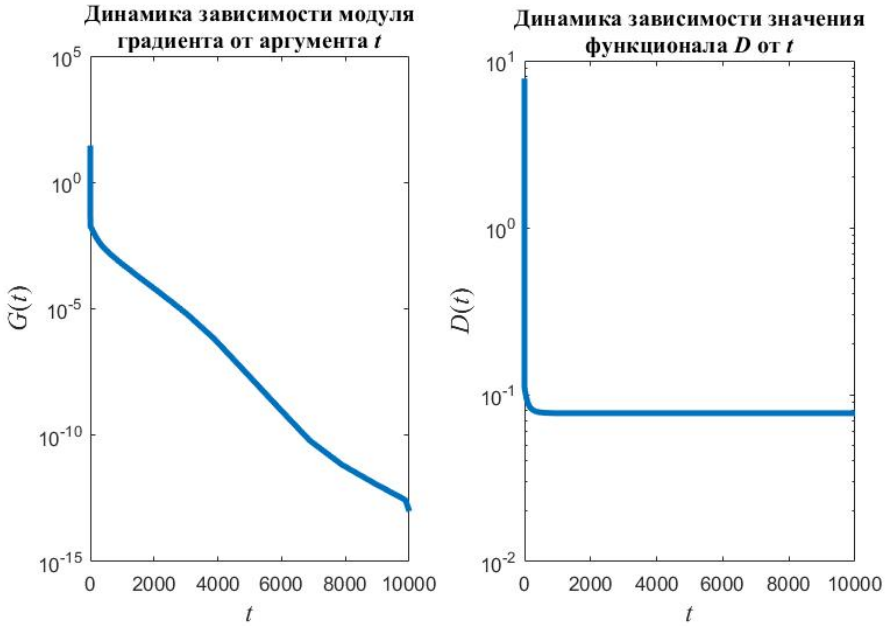

Рис.1. Динамика зависимости модуля градиента G (левый график) и значения функционала D (правый график) от аргумента t

Отрицательные значения знаков параметров a_2, a_3 в таблице №1 отвечают нашим ожиданиям. Варьированию подвергались значения параметров α и β. Оказалось, что максимальное значение корреляции без учета более мелких вариаций находится в окрестности

значений степеней $\alpha = 0{,}2$ и $\beta = 0{,}2$. Отметим, что если в формуле для емкости среды (3) не учитывать осадки ($a_3 = 0$), коэффициент корреляции при значении параметров из пункта №5 таблицы №1 составит значение 0,6341. Полученное значение несколько меньше числа 0,6611, т.е. компонента осадков дает свой вклад. Наконец, в случае отсутствия температуры в формуле (3) ($a_2 = 0$) значение корреляции составило 0,5587, что заметно меньше значения 0,6611. Данные замечания означают, что совместное использование показателей температуры и осадков повышает корреляцию значений обратной функции емкости среды обитания и обратной функции плотности народонаселения. Таким образом, можно сделать вывод о том, что приблизительно две трети корреляции между обратной функцией емкости среды обитания, вычисляемой по формуле (3) и функцией обратной плотности народонаселения приходится на среду обитания в части температуры и осадков.

Сравним визуально карты обратной функции плотности емкости среды обитания и обратной функции плотности народонаселения. Искомые карты нарисуем с помощью линий уровня. На рис.2 приведен итог. На левой карте рис.2 приведены линии уровня обратной функции плотности емкости среды, рассчитанной по формуле (3) с параметрами из пункта №5 таблицы №1. Всего построено 12 линий уровня с равноотстоящими значениями, которые отображают диапазон изменения обратной емкости $[0{,}0054; 1{,}1268]$. На правой карте рис.2 приведена обратная функция плотности народонаселения. Построено также 12 линий уровня с равноотстоящими значениями, которые отображают диапазон изменения обратной плотности народонаселения $[0{,}0001; 0{,}9664]$.

На рис.2 все более синим вплоть до фиолетового цветами обозначены места малых значений обратной функции плотности емкости среды и обратной функции народонаселения. Видна явная корреляция местоположений синих и фиолетовых мест на левой и правой картах рис.2. Отметим, что данные места отвечают наиболее комфортным для человека условиям проживания. Имеются и заметные расхождения на всех континентах. Справа от каждой из карт приведена палитра, устанавливающая связь с численным значением соответствующего показателя. Кроме того, на каждой из карт проведена береговая линия в виде красной линии.

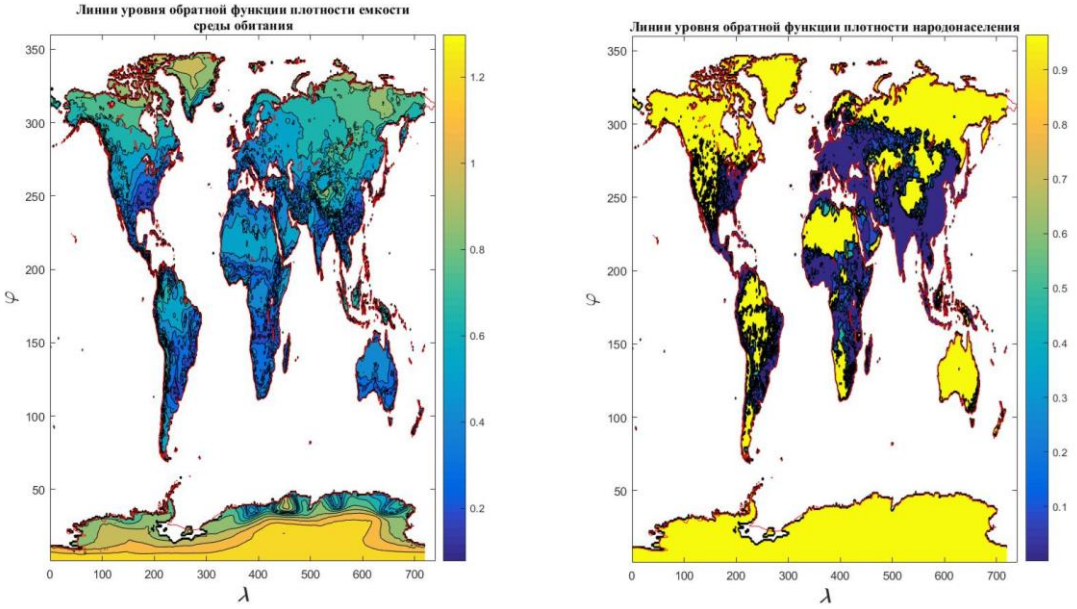

Рис.2. Карты линий уровня функции обратной плотности емкости среды обитания (слева) и обратной функции плотности народонаселения (справа)

Перейдем от обратных значений плотности емкости среды и плотности народонаселения к прямым значениям. Сравним линейный коэффициент корреляции Пирсона и ран-

говые корреляции Кендалла и Спирмена для плотности емкости среды обитания и плотности народонаселения. Для этого преобразуем матрицы $\rho_{i,j}\sqrt{\cos\varphi_i}$ и $p_{\mathrm{density},i,j}\sqrt{\cos\varphi_i}$ в векторы и найдем между этими векторами соответствующие коэффициенты корреляции. В таблице №2 приведен итог.

Таблица №2. Коэффициенты корреляции Пирсона, Кендалла и Спирмена между плотностью емкости среды обитания и плотностью народонаселения			
Коэфф. корр.	Пирсона	Кендалла	Спирмена
Значение коэфф. корр.	0,1740	0,7582	0,9034

Из таблицы №2 видно сколь велики коэффициенты ранговой корреляции по сравнению с обычным линейным коэффициентом корреляции. Именно по этой причине в (7) рассматривался линейный коэффициент корреляции между обратными функциями плотности емкости среды обитания и плотности народонаселения. Для обратных величин линейный коэффициент корреляции оказался равным 0,6611, что значительно больше значения 0,1740.

В итоге проведенных выше построений и вычислений выберем для функции емкости среды обитания людей функцию (3), которая отображает связь с такими характеристиками, как температура и осадки, а точнее с отклонениями температуры и осадков от соответствующих комфортных значений.

Более подробно математическая модель геополитики изложена в цитированных выше работах автора.

Внс кафедры математического
моделирования и информатики
физфака МГУ, д.ф.-м.н. **К.Э. Плохотников**

18.09.2018 г.