

МЕТОДЫ ОБУСЛОВЛЕННОГО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ С КЛАССИФИКАТОРАМИ

Е.Н. Терентьев¹, Н.Е. Шилин-Терентьев²

¹ Физический факультет МГУ, Москва, Россия, en.teren@physics.msu.ru;

² Google, San Francisco, CA, USA, nikolay.terentyev@gmail.com;

Классификация разновидностей методов сверхразрешения производится по величине промежутка между минимальным значением Модуляционной Передаточной Функции (МПФ) $M(O)$ (для дискретной Аппаратной Функции (АФ) O) и нулем. Классификаторы лежат в основе концепции сверхразрешения.

Введение

Проблема сверхразрешения начинается с построения множества $\{O\}$ дискретных моделей АФ O по непрерывной модели АФ $\text{par}O$ по трем параметрам: длина области определения L_{oc} , шаг оцифровки dx и параметр обусловленности $DIAP=1/diap$ (от слова *diapazon* для значений МПФ $M(O)$, $M(R)$). В примере на Рис. 1 оцифровывается стандартная гауссоида с $L_{oc}=6$ с $dx=1$ и $dx=1/2$. Задачи выбора дискретной модели АФ O рассматриваются на множестве $LO=\{pO \mid [L_{oc}, dx, DIAP]\}$ обратимых $pR=pO^{-1}$, $M(pR)=1/M(pO)$.

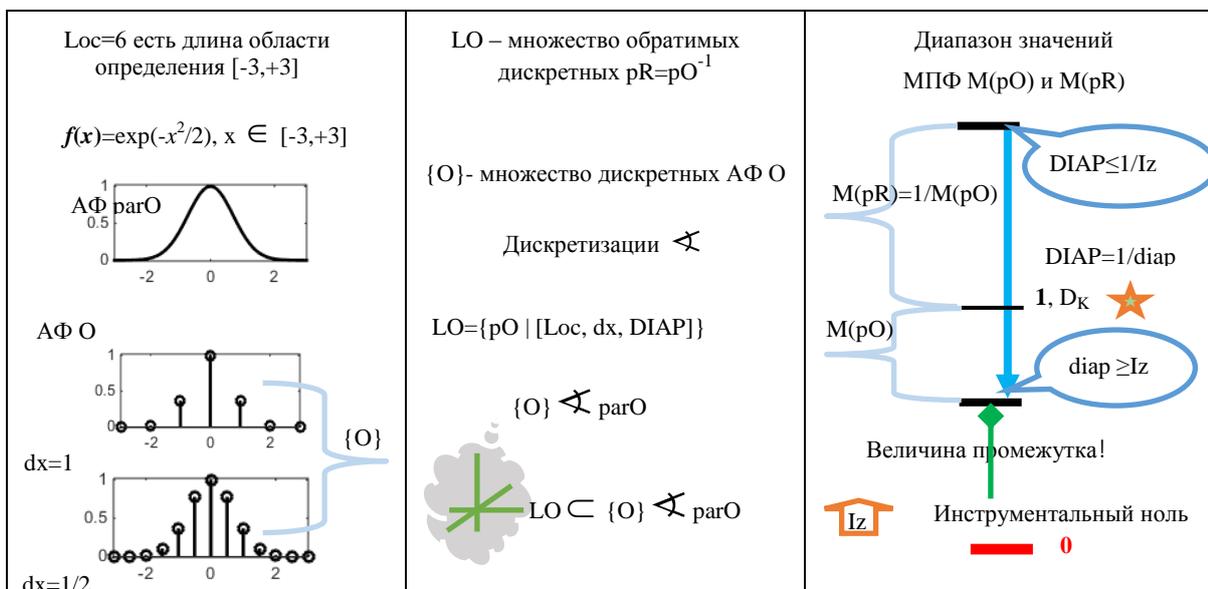


Рис. 1. Иллюстрации основных понятий

Мы исходили из того, что нам доступны изображения низкой точности в одно или в двух байтовом представлении. Поэтому в классификаторе (см. Рис. 2) разновидностей методов сверхразрешения пока выделяем пять методов - клеток в зависимости от длины промежутка между минимальным собственным значением $md = \min(|M(O)|)$ и нулем и точности представления изображений.

Прибор априори – до измерений должен “настраиваться” по параметрам $[L_{oc}, dx, mD]$ по непрерывной АФ $\text{par}O$ [2,3], так что бы было либо естественное $md > 0$, либо с интерполированием изображения под другой шаг оцифровки, и повышением обусловленности $DIAP$ для АФ O , $mD > md > 0$, см. Рис. 2 и Рис. 4. Сказанное означает, что в Классификаторе мы можем оказаться в методах **С**, **Д** (измерения низкой и высокой точности), но лучше бы сразу попасть в идеальный метод **В** (обычное обращение без настройки обусловленности), см. Рис. 2.

Классификаторы

Классифицируются методы сверхразрешения по величине промежутка $0 \leq md \leq 1$ для АФ O в линейной модели регистрации изображений $I_{\sigma} = O * I_x$, звездочкой $*$ обозначена свертка.

A ★ $O=D_K$ $md=M(D_K)=1$ <i>Обращение не нужно</i>	B ★ $O \sim D_K$ $1 \leq md \leq 10^{-1}$ $R=O^{-1}$ <i>Обычное обращение</i>	C $M(O), M(pO)$ $10^{-1} \leq md \leq 10^{-4}$ $md \rightarrow mD$ $pR=pO^{-1}$ <i>Для измерений низкой точности</i>	D $M(O), M(pO)$ $10^{-4} \leq md \leq 10^{-5}$ $md \rightarrow mD$ $pR=pO^{-1}$ <i>Для измерений высокой точности</i>	E $M(O), M(pO)$ $Iz \leq md \leq 10^{-5}$ $md \rightarrow mD$ $pR=pO^{-1}$ <i>Модельные эксперименты</i>	F, Finish $M(O) \sim D_K$ $0 \leq md \leq Iz = 10^{-13}$ <i>Ошибки мантиссы</i>
--	---	--	---	--	---

Рис. 2. Классификатор методов сверхразрешения. В последнем случае F из-за ошибок мантиссы вычисления не имеют смысла.

Исходные данные

Выделенный фрагменты изображения камня на Марсе – малококонтрастный, низкой точности, яркости в одном байте, соответствует методу C классификатора.

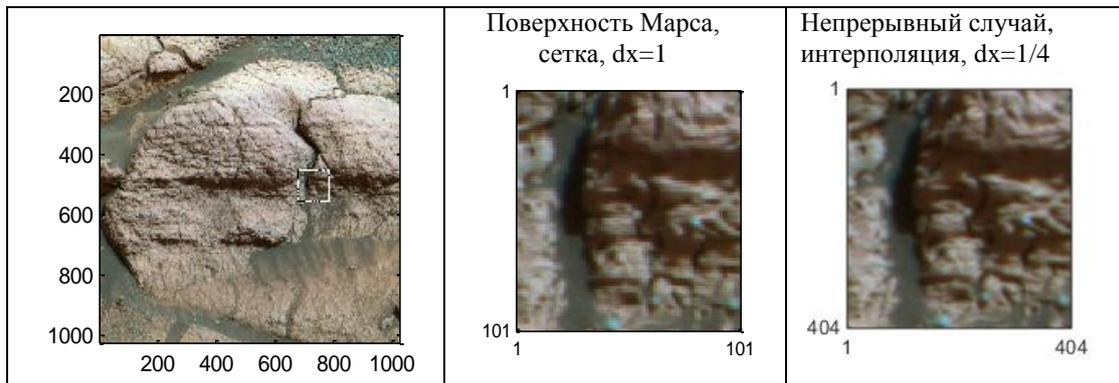


Рис. 3. Фрагмент изображения поверхности Марса, представленного на исходной сетке с $dx=1$ и интерполированное изображение на сетке с $dx=1/4$.

Выбор адекватной модели в методах C, D и E

Основная задача по выбору АФ $pO=pR^{-1}$ ставится как задача на минимум:

$$\min_{LO} \{ \|pR\| \mid Err(pO) \leq err \}, \quad LO = \{ pO \mid [Loc, dx, mD] \} \quad (1)$$

с построением Характеристикой Адекватности Модели (ХАМ) АФ O [2,3]

$$\{ x=Nor(pR)=\|pR\|, y=Err(pO), z=\Pi(pR*O) \} \quad (2)$$

Сверху настраиваемый промежуток ограничен $mD < 1/Iz$, Iz – инструментальный ноль В связи с этим ограничением по ошибке рассмотрим вариант ХАМ АФ O учитывая Iz обращение двумерной МПФ $M(O)$ (в записи без индексов):

$$M(zR) = \begin{cases} 1 / M(O), & \text{for all } |M(O)| > Iz \\ M(O) \end{cases} \quad (3)$$

$$\{ x=\|zR\|, y=Err(zO), z=\Pi(zR*O) \} \quad (4)$$

В ХАМ АФ O (2,4) по оси z откладываются значения Индикаторов Обратимости (Indicators of Inversion) $\Pi(pR*O)=(pR*O)(0,0)$ и $\Pi(zR*O)=(zR*O)(0,0)$, т.е. значения сверток настраиваемой pR и не настраиваемой zR с исходной АФ O в точке (0,0). В обратимом случае $\Pi(zR*O)=1$, $zR=R=O^{-1}$. Может случиться и так, что изменяя длину области определения Loc мы получаем обратимый случай $\Pi(pR*O)=1$, $pR=O^{-1}$. В ХАМ АФ O (2,4) Индикаторы Обратимости являются основным понятием для интерпретации результата сверхразрешения. Результат сверхразрешения соответствует прибору с АФ $pR*O$. При идеальном сверхразрешении $pR*O=D_K$ - символ дельта Кронекера.

Оценивание величины сверхразрешения

Пусть имеет место нормировка для АФ O : $\sum_{i,j=1}^{Loc+1} O_{ij} = 1$, тогда МПФ $M(O)(0,0)=1$, в этом случае мы будем оценивать настраиваемое сверхразрешение величиной

$$SR = BP / \sum_{i,j=1}^{Loc+1} M_{ij}(pO) \leq \sum_{i,j=1}^{Loc+1} 1 / \sum_{i,j=1}^{Loc+1} M_{ij}(pO) \geq 1 \quad (5)$$

$$BP = \sum_{i,j=1}^{Loc+1} M_{ij}(pR)M_{ij}(O) \quad (6)$$

где BP (6) (от Band Pass) – полоса пропускания. Если АФ $O=D_K$ – символ дельта-Кронекера, то $SR=1$. Понятно, что проблема сверхразрешения возникает для случаев, когда АФ $O \neq D_K$.

Полоса пропускания ограничивается площадью области определения АФ O $BP \leq \sum_{i,j=1}^{Loc+1} 1 = (Loc+1)^2$. Можно ввести максимально возможные величины zSR и zBP (аналогично $SR(5)$ и $BP(6)$) при минимальной обусловленности $DIAP=1/Iz.$, но, заметим, что это реализуется при максимальной реакции на шум $Nor(zR)$ (4).

Примеры ХАМ АФ pO

С ХАМ АФ O (2,4) представлены методы от **A** до **E**, отмеченные светлыми прямоугольниками. ХАМ дискретной модели с $dx=1$ и размером области определения $Loc=12$ соответствует методу **C**. ХАМ непрерывной модели с $dx=1/4$, $Loc=12$ ближе к методам **D, E**, см. Рис. 4.

Если ХАМ непрерывной модели изображать в одном масштабе, то ХАМ непрерывной модели условно займет место длинного прямоугольника, помеченного $Err(pO)=3.1$ и $dx=1/4$, см. Рис.4.

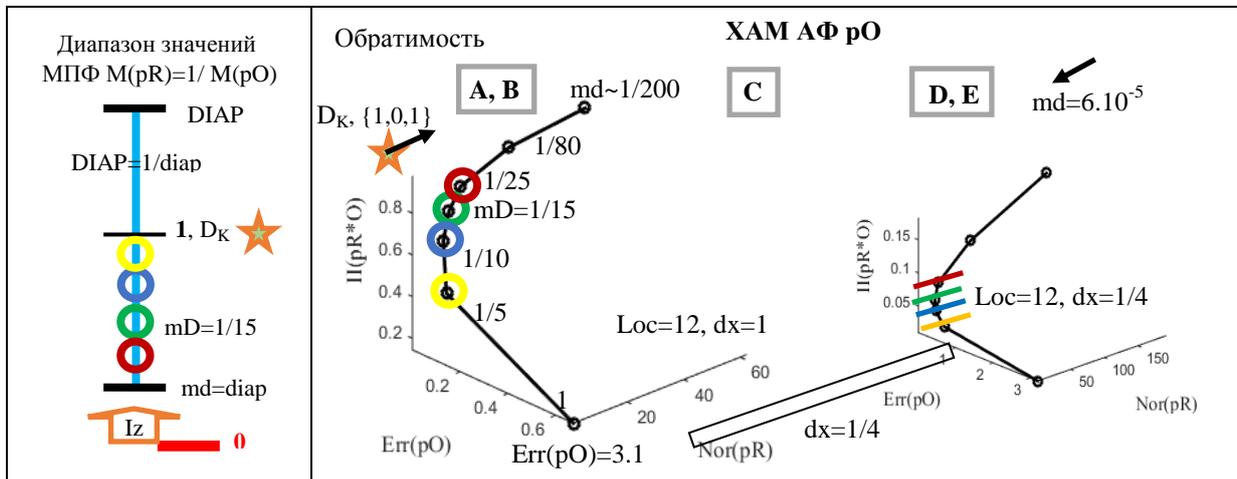


Рис. 4. Промежутки $md=\min|M(O)|$, $mD=\min|M(pO)|$ и ХАМ АФ pO .

Математическая фокусировка

Математическая фокусировка – регулировка увеличения разрешения изображений начинается с уменьшения от единицы регулируемого промежутка до нерегулируемого $1 \geq mD \geq md > 0$. При $mD=1$ нет математической фокусировки, в результате остается исходное изображение, ошибка $Err(D_K)$ – максимальная. С уменьшением mD (падает обусловленность АФ pO) растут величины сверхразрешения SR (имеет место математическая фокусировка), реакции на шум $Nor(pR)$ и ошибки $Err(pO)$ уменьшаются до нуля, см. Рис.4-6.

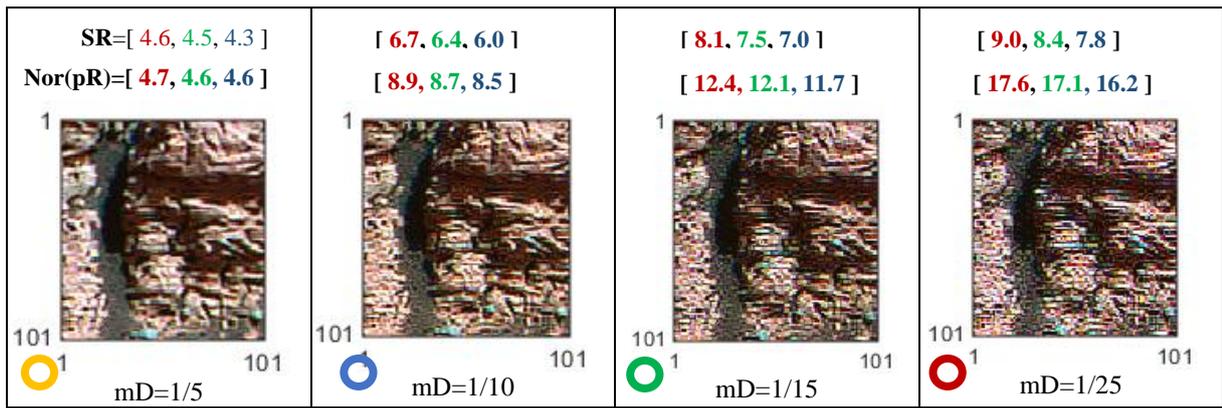


Рис. 5. Обусловленные сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR) в сетке с dx=1

Для однобайтовых изображений (низкой точности метод C) ограничение (неадекватность) реализуется около $mD \sim 1/25$, появляются изменяющиеся (“выбиваются” красные) мелкие детали в изображении (высокой реакцией на шум – Nor(pR)), см. Рис. 5. Поэтому считаем, для однобайтовых изображений, как в нашем примере ($\delta \sim 3-5\%$), допустимы величины SR~9.5. Для двух байтовых изображений ожидается сверх- разрешение SR~20-30, методы типа D.

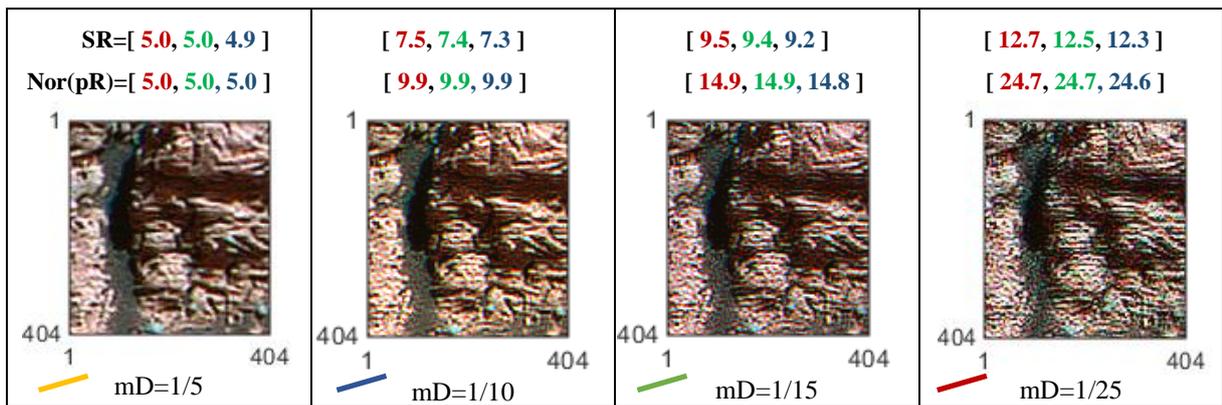


Рис. 6. Обусловленные сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR) с dx=1/4

Промежутки md и mD

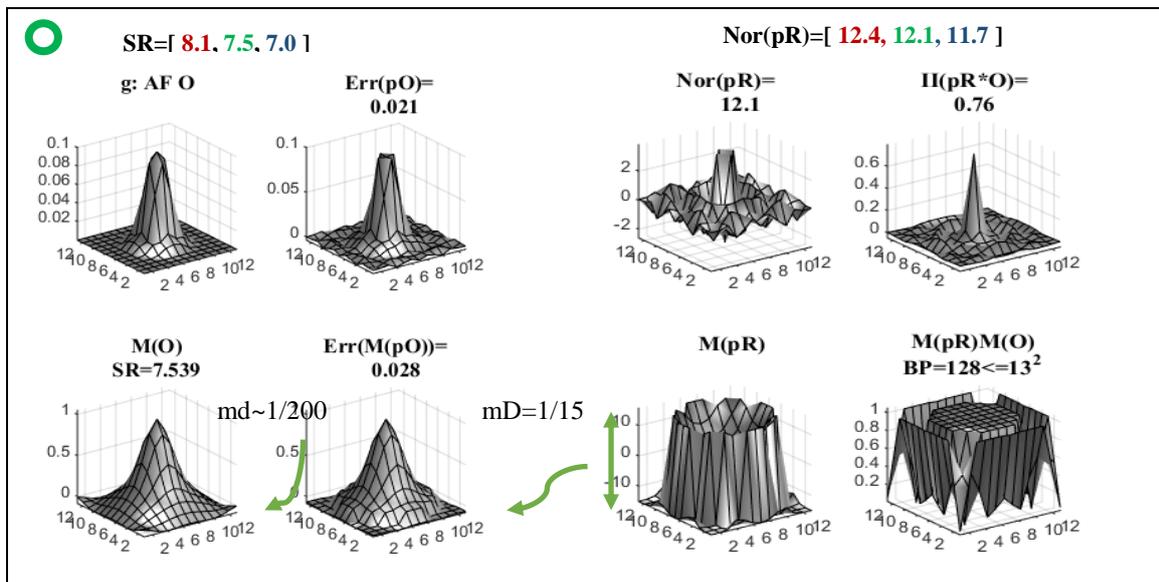


Рис. 7. Дискретная модель dx=1 с промежутками md~1/200 и mD=1/15.

На Рис 6, 7 представлены промежутки $md = \min|M(O)|$ - не настраиваемый и $mD = \min|M(pO)|$ - настраиваемый промежуток МПФ $M(O)$ и нулем.

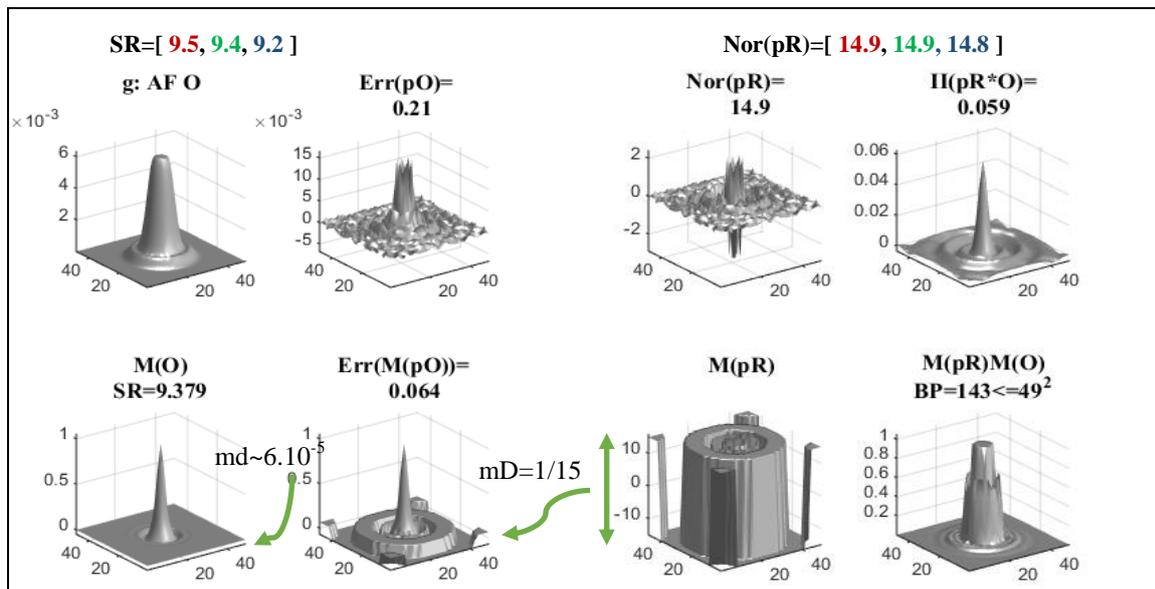


Рис. 8. Непрерывная модель $dx=1/4$ с промежутками $md \sim 6 \cdot 10^{-5}$ и $mD=1/15$.

Важное свойство: В модели регистрации изображений $I_{\rho} = O * I_x$ при изменении настраиваемого промежутка mD к не настраиваемому $md > 0$ (с понижением обусловленности АФ pO) и при стремлении к нулю ошибки $\rho \rightarrow 0$, приближенное сверхразрешение решение с величиной SR стремиться к идеальному сверхразрешению с величиной zSR . Практически обусловленные сверхразрешения в изображениях $pR * I_{\rho}$, $zR * I_{\rho}$ ограничивается реакцией на шум $Nor(pR)$, $Nor(zR)$. Это по сути аналог асимптотического утверждения А.Н. Тихонова для метода регуляризации [4].

Обсуждение

Подход в проблеме обусловленного сверхразрешения с Классификаторами упорядочивает создание моделей для достижения, адекватного максимального сверх разрешения.

Не гладкость решений позволяет обоснованно и безопасно применять данный метод, например, в контурах управления реакторами, диаграммами направленности в радарх, навигаторах и т.п.

Методы данной работы, связанные обусловленным сверхразрешением, классификаторами, математической фокусировкой представляют концепцию сверхразрешения.

Литература

1. E.N. Terentiev, N.E. Terentiev, N. E. // ISSN 1062-8738, *Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics*, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, DOI 10.3103/S1062873815120229
2. E.H. Терентьев, ... // УЗФФ Московского Университета, 9 с., №6, 1761005(2017)
3. Terentiev E.N., Terentiev N.E., Farshakova I.I. // Springer International Publishing, DOI: 10.1007/978-3-319-77788-7_19
4. А.Н. Тихонов, М.В. Уфимцев "Статистическая обработка результатов эксперимента" изд. Московского университета, 1988.

METHODS OF CONDITIONED SUPER-REDUCTION WITH CLASSIFIERS

E.N. Terentiev¹, N.E. Shilin-Terentyev²

¹Faculty of Physics M.V. Lomonosov MSU, Moscow, Russia, en.teren@physics.msu.ru;

²Google, San Francisco, nikolay.terentyev@gmail.com;

Classification of varieties of methods of super-resolution is based on the gap between the minimum value of the Modulation Transfer Function (MPF) $M(\omega)$ (for discrete Apparatus Function (AF) O) and zero. Classifiers lie at the heart of the concept of super-resolution.