Образцы задач для зачета

Раздел 1. Простейшие свойства вероятностей.

1.1. События A, B, C независимы в совокупности и $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$, $P(C) = 0.6$. Найти

а) $P(A \cup B \cup C)$;

б) $P(A \cap B \cup C)$;

в) $P((A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Раздел 2. Прямое вычисление вероятностей.

2.1. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого игрока.

2.2. N человек садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что три фиксированных лица сядут рядом, причем A справа от B , а C — слева.

2.3. Из последовательности чисел $1, 2, ..., n$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них больше k, а другое — меньше $(1 < k < n)$?

2.4. На полке в случайном порядке расставлены 40 книг, среди которых имеется трехтомник Лермонтова. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания (не обязательно рядом).

2.5. Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число при возведении в квадрат даст число, оканчивающееся единицей.

2.6. Из колоды карт (52 шт.) извлекаются три. Какова вероятность, что это будут тройка, семерка и туз?

2.7. Найти вероятность того, что при пяти бросаниях монеты герб выпадет по крайней мере три раза подряд.

2.8. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2 и 3 вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности билетов имеют одинаковые вероятности. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадал с собственным.

2.9. В чулане находится 10 пар ботинок. Случайно выбираются 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди них по крайней мере одна пара.

2.10. Некто рассыпал слово АНАНАС, составленное из букв разрезной азбуки, и затем собрал его в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получилось слово АНАНАС.

2.11. Из цифр 1, 2, 3 наугад составляется шестизначное число. Найти вероятность того, что получится четное число, содержащее всего одну цифру 2 и что в этом числе цифра 1 будет встречаться два раза, цифра 3 три раза.

2.12. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы из них с вероятностью 0.9 было хотя бы одно четное?

2.13. Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна p. Какова вероятность, что k-ый успех придется на m-ое испытание

Раздел 3. Геометрические вероятности.

3.1. На отрезке наудачу ставят две точки, делящие отрезок на три. Какова вероятность, что из полученных отрезков можно построить треугольник?

3.2. На отрезок [0,1] наудачу бросается две точки, ξ и η. Какова вероятность того, что корни уравнения $x^2 + \xi x + \eta = 0$ действительны?

3.3. Какова вероятность, что из трех взятых наудачу отрезков, длины которых < 1, можно построить треугольник?

3.4. В единичный квадрат наудачу бросается точка. Найти вероятность, что ее расстояние до ближайшей стороны квадрата меньше, чем до ближайшей диагонали.

3.5. На поверхности сферы радиуса R произвольно выбираются две точки. Какова вероятность, что проходящая через них дуга большого круга стягивает угол, меньший α $(\alpha < \pi)$?

3.6. Внутри равностороннего треугольника ABC со стороной 1 наугад выбирают точку M. Какова вероятность, что площадь треугольника AMB больше $\frac{\sqrt{3}}{8}$?

3.7. На отрезке AB наудачу выбираются две точки L и M. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

Раздел 4. Условные вероятности, формулы Байеса.

4.1. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет единица. При первом бросании единица не выпала. Найти вероятность того, что потребуется не менее трех бросаний.

4.2. Бросают три кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет единица, если на всех трех выпали разные грани?

4.3. Игральная кость подброшена дважды.Пусть событие A — «число очков при первом бросании равно 5», а B — «сумма очков при двух бросаниях равна 9». Проверить утверждения: а) события A и B независимы; б) события A и B образуют полную систему несовместных событий. Ответ обосновать.

4.4. Пусть вероятность попадания в цель равна 0.7, а вероятность поражения в случае попадания 0.2. Какова вероятность, что после трех выстрелов цель не поражена?

4.5. В сосуд, содержащий n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь белый шар, если все комбинации среди шаров, находившихся в сосуде равновероятны?

4.6. Машины A, B и C производят соответственно 25, 35 и 40% всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Какова вероятность, что выбранная деталь сделана машиной A (B или C), если она оказалась бракованной?

4.7. В схеме Бернулли вероятность исхода "1" равна p, вероятность "0" равна $1-p$. Найти вероятность того, что последовательность "00" появится раньше, чем последовательность "01".

4.8. Известно, что при бросании 10 костей выпала по крайней мере одна единица. Какова вероятность, что выпало более одной единицы?

4.9. Из урны, в которой было $m > 3$ белых шаров и n черных, утерян шар неизвестного цвета. После этого из нее были вынуты два шара, которые оказались белыми. Какова вероятность, что был утерян белый шар?

4.10. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет единица. Пусть число испытаний n четно. Какова вероятность того, что при этом $n = 2$?

Раздел 5. Функции от случайных величин.

5.1. Случайные величины ξ и η независимы и имеют плотность вероятности $e^{-x},\ x > 0$. Найти плотность вероятности $\xi - \eta$.

5.2. Случайные величины ξ и η независимы и имеют плотность вероятности $e^{-x},\ x > 0$. Найти плотность вероятности $|\xi - \eta|$.

5.3. Случайные величины ξ и η независимы и имеют плотность вероятности e^{-x}, $x > 0$. Найти плотность вероятности ξ/η.

5.4. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности e^{-x}, $x > 0$. Найти плотность вероятности $\eta = \sqrt{\xi}$.

5.5. Через точку $(0, l)$ проведена наугад прямая. Найти плотность вероятности абсциссы точки пересечения прямой с осью Ox.

5.6. Найти плотность вероятности объема куба, если ребро распределено равномерно на $[0, a]$.

5.7. Пусть $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и независимы. Найти плотность вероятности $a\xi + b\eta + c$.

5.8. Пусть $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и независимы. Найти плотность вероятности случайных величин $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ и $\varphi = \mathrm{arctg}(\frac{\eta}{\xi})$.

5.9. Найти плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин, одна их которых распределена равномерно на [0,1] а другая имеет показательное распределение $p(x) = e^{-x}, x > 0$.

5.10. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, $P(\xi = k) = P(\eta = k) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Найти распределение $\xi + \eta$.

Раздел 6. Функции распределения, моменты.

6.1. Пусть $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и независимы. Найти $\mathbf{M} \max(\xi, \eta)$, $\mathbf{D} \max(\xi, \eta)$.

6.2. Пусть ξ нормальная $\mathcal{N}(0, 1)$ случайная величина. Найти $\mathbf{M}|\xi+1|$, $\mathbf{D}|\xi+1|$.

6.3. Случайная точка A имеет в круге радиуса R равномерное распределение. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния ξ точки A от центра.

6.4. Случайные величины $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0, 4)$ и независимы. Найти вероятность того, что точка (ξ, η) попадет в кольцо с радиусами 2 и 3 и центром в начале координат.

6.5. Случайный вектор (ξ, η) имеет функцию распределения $F(x, y) = 1 + e^{-(ax+by)} - e^{-ax} - e^{-by}$, при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $F(x, y) = 0$ — в остальных случаях. Найти частные (маргинальные) распределения ξ и η. Исследовать эти сл. величины на независимость и некоррелированность.

6.6. О случайных величинах (ξ и η) известно, что $p_\xi(x) = \exp(-x)$, при $x \geqslant 0$, $D\eta = 2$, $D(\xi - \eta) = 3$. Найти коэффициент корреляции ξ и η.

6.7. Вероятность того, что при трех независимых выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз, равна 0.992. Найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при двадцати выстрелах.

6.8. Случайная величина ξ имеет гауссовское распределение вероятностей со средним значением 25. Вычислить вероятность попадания этой ξ в интервал (35, 40), если она попадает в интервал (20, 30) с вероятностью 0.2.

6.9. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0;1)$. Вычислить $\mathbf{M}\xi^3$.

6.10. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(\pi;e)$. Вычислить $F_\xi(\mathbf{M}\xi)$.

6.11. Дана совместная плотность вероятности случайных величин ξ и η

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = Cxy, \text{ если } 0 < x < \sqrt{y} < 1, \;\; x > 0, \text{ иначе } p_{\xi,\eta}(x,y) = 0.$$

Определить константу C и найти:

а) математические ожидания и дисперсии ξ и η;
б) плотности маргинальных распределений ξ и η;
в) плотности условных распределений ξ и η;
г) условные математические ожидания ξ и η;
д) ковариацию ξ и η.

6.12. Игра заключается в том, что монету бросают поочередно два игрока до появления герба. Если герб выпал при k-м бросании, то игрок, бросавший монету, получает k рублей. Найти математическое ожидание выигрыша каждого из игроков.

6.13. Пусть $\eta = |\xi|$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Найти $F_\eta(x)$, $\mathbf{M}\eta$, $\mathbf{D}\eta$.

6.14. Пусть $\eta = \operatorname{sign}(\xi - 1)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Найти $F_\eta(x)$, $\mathbf{M}\eta$, $\mathbf{D}\eta$.

6.15. Найти $\mathbf{M}\cos(\xi)$, $\mathbf{D}\cos(\xi)$, если $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$.

6.16. Ведется стрельба по мишеням. Найти ковариацию числа попаданий в девятку и восьмерку при n выстрелах, если вероятности при каждом выстреле выбить 1, 2. ...,10 одинаковы.

Раздел 7. Характеристические функции.

7.1. Найти характеристическую функцию случайной величины $\ln(\xi)$, где ξ распределена равномерно на (0,1).

7.2. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ^2, где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$.

7.3. Найти характеристическую функцию геометрического распределения.

7.4. Найти характеристическую функцию отрицательно биномиального распределения

.

7.5. Найти характеристическую функцию случайной величины с плотностью вероятности $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

7.6. Найти плотность вероятности случайной величины, которой соответствует характеристическая функция $f(t) = \frac{1+it}{1+t^2}$.

7.7. Найти плотность вероятности случайной величины, которой соответствует характеристическая функция $f(t) = \frac{1}{1-2it}$.

7.8. Найти плотность вероятности случайной величины, которой соответствует характеристическая функция $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

7.9. Найти плотность вероятности случайной величины, которой соответствует характеристическая функция $f(t) = e^{-a|t|}, a > 0$.

7.10. Найти плотность вероятности случайной величины, которой соответствует характеристическая функция $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

7.11. Найти распределение случайной величины, которому соответствует характеристическая функция $f(t) = \cos(2t)$.

7.12. Найти распределение случайной величины, которому соответствует характеристическая функция $f(t) = (\cos(t))^2$.

Раздел 8. Предельные теоремы.

8.1. Имеется 100 одинаковых станков, каждый из которых включен 0.8 рабочего времени. Найти вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся включенными от 78 до 86 станков.

8.2. При наборе книги вероятность ошибки для каждой буквы 10^{-4}. Корректор обнаруживает каждую опечатку с вероятностью 0.9. После него автор обнаруживает каждую из оставшихся опечаток с вероятностью 0.5. Найти вероятность того, что в книге с 100000 знаками не более двух опечаток.

8.3. В поселке 2500 жителей. Каждый из них (независимо от других) 6 раз в месяц ездит в город, выбирая случайно день поездки. Какой вместительности должен быть поезд (ходит один раз в сутки), чтобы он переполнялся не более одного раза в 100 дней?

8.4. Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 3 до тех пор, пока не наберется 720 чисел. Какова вероятность, что потребуется перебрать $\geqslant 2100$ чисел?

8.5. Найти приближенное значение вероятности того, что число "девяток"среди 10000 случайных одноразрядных чисел заключено между 940 и 1060.

8.6. Известно, что левши составляют в среднем 1%. Оценить вероятность того, что среди 200 людей окажется по меньшей мере четверо левшей.

8.7. Найти число k, при котором в вероятностью 0.5 число выпадений герба при 1000 бросаниях монеты будет лежать между 490 и k.

8.8. Стрелок при выстреле выбивает 10, 9, 8, 7, 6 очков с вероятностями 0.5, 0.3, 0.1, 0.05, 0.05 соответственно. Какова вероятность, что при 100 выстрелах он наберет более 920 очков?

8.9. 1000 раз бросается игральная кость. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.99 будет лежать сумма выпавших очков.

8.10. Складывается 10^4 чисел, округленных с точностью до 10^{-7}. Предполагается, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-7}$. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.99 будет лежать суммарная ошибка.

8.11. Мишень устроена так, что выбить 1, ..., 10 очков равновероятно. Стрельба ведется до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 1100. Оценить вероятность того, что для этого понадобится более 205 выстрелов.

8.12. Какое минимальное число опытов n следует провести, чтобы с вероятностью 0.95 можно было утверждать, что частота появления события будет отличаться по абсолютной величине от его вероятности, равной 0.6, не более чем на 0.02? Ответ дать с помощью неравенства Чебышева и интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Объяснить различие результатов.

8.13. Выход цыплят в инкубаторе составляет 75% от числа заложенных яиц. Оценить вероятность того, что из 1000 заложенных яиц вылупятся: а) ровно 750 цыплят; б) от 720 до 780 цыплят.

Раздел 9. Конечные однородные цепи Маркова. Случайные блуждания по целочисленной прямой.

9.1. Цепь Маркова имеет два состояния. Начальное распределение задается вероятностями $a_1 = 1.3$ и $a_2 = 2/3$. Матрица перехода за один шаг имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найти распределение через два шага.

9.2. Дана матрица перехода за один шаг для цепи Маркова с двумя состояниями:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-q & q \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу перехода за n шагов.

9.3. Найти предельные вероятности цепи Маркова, если матрица перехода за один шаг имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

9.4. Частица совершает случайные скачки единичной длины по целочисленным точкам действительной прямой, прыгая направо с вероятностью p и налево с вероятностью q, $p+q=1$. В момент времени $t=0$ частица находилась в точке $x=0$. Найти вероятность того, что в момент времени $t=8$ частица окажется в точке с координатой $x=4$, если известно, что за три шага отошла от нуля не больше чем на 1 в любом направлении.

9.5. Для симметричного случайного блуждания, которое начинается из нуля, найти дисперсию координаты частицы на третьем шаге.

9.6. В первом ящике лежат два шара, во втором – двадцать. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ выбирают наугад один из ящиков, вынимают один шар и перекладывают в другой ящик. Если в какой-то момент любой из ящиков оказался пуст, перекладывания прерывают. Найти вероятность того, что пятое перекладывание удастся совершить.

9.7. Имеются два ящика, в в каждом из которых лежит по двадцать шаров. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ выбирают наугад один из ящиков, вынимают один шар и перекладывают в другой ящик. Найти вероятность того, что в результате шести перекладываний шаров в ящиках осталось поровну, а в результате десятого перекладывания в одном, заранее выбранном и фиксированном, ящике оказалось больше шаров, чем в другом.